Cálculo diferencial e integral I

Problemas resueltos

Canek: Portal de Matemáticas

Cálculo diferencial e integral I

Problemas resueltos

Ernesto Javier Espinosa Herrera (coordinador)
Ignacio Canals Navarrete
Manuel Meda Vidal
Rafael Pérez Flores
Carlos Antonio Ulín Jiménez

Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco
Editorial Reverté
Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • México
2008

ISBN de la colección 978 968 6708 73-8

ISBN del volumen 978 968 6708 78-3

Primera edición 2008

Impreso en México. *Printed in Mexico*
Programas Educativos, S.A. de C.V.
Calzada Chabacano 65, local A
Col. Asturias, México, D.F.

Captura de datos: Teresa Jurado Dorantes

Portada: Lucila Montoya García

Cuidado editorial: Concepción Asuar

Todo el material de *Cálculo diferencial e integral I. Problemas resueltos* se encuentra en línea en la dirección:
http:\\canek.azc.uam.mx

Índice

Introducción

No importa cuánto entregues, nunca será suficiente

Donald W. Winnicott

Cálculo diferencial e integral I. Problemas resueltos contiene el desarrollo, con todo detalle, y la solución del conjunto de ejercicios que aparecen en el libro de teoría *Cálculo diferencial e integral I*. Ambos libros fueron diseñados como una sola obra, en dos tomos, concebida para estudiantes de primer ingreso de escuelas de ingeniería. Tanto los ejemplos de la teoría como el conjunto de los ejercicios fueron elegidos entre aquellos que los autores hemos utilizado en las múltiples ocasiones que hemos impartido este material en los programas de ingeniería de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco.

Durante el proceso de elaboración de los dos tomos, siempre se procuró presentar la teoría, los ejemplos y los ejercicios de forma asequible para cualquier estudiante que inicia su formación universitaria en escuelas y facultades de ingeniería. Hemos puesto especial atención en una didáctica que refuerce en el estudiante el desarrollo de procesos de abstracción implícitos en el contenido matemático. Para nosotros, el alumno es el protagonista más importante en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje, por lo que deseamos que, con este material, adquiera las bases necesarias para continuar aprendiendo y asimilando los conocimientos durante su formación en el campo de la ingeniería.

Tanto el temario completo del libro de teoría como el del libro de problemas resueltos se encuentran disponibles en internet, en la dirección http://canek.azc.uam.mx. En las siguientes líneas se describe el contenido matemático de cada uno de los capítulos de la obra completa.

El primer capítulo, *Los números reales*, trata sobre el universo donde se desarrolla esta parte de la matemática denominada cálculo diferencial. Se presentan los números reales destacando sus subconjuntos: los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales. Se hace énfasis en la ubicación de éstos en una recta horizontal, en sus propiedades algebraicas y en su orden. Por la gran utilidad que tiene en el estudio del cálculo, se muestra el proceso de solución de diferentes tipos de desigualdades.

El segundo capítulo, *Funciones*, centra la atención en uno de los elementos fundamentales de la matemática: el concepto de función y, como caso particular, el de función real de variable real. De ellas damos una representación gráfica, definimos operaciones incluyendo la composición y se explica la manera de transformar funciones obteniendo nuevas funciones a partir de una conocida. Clasificamos las funciones como sigue: funciones monótonas, pares e impares, lineales, cuadráticas, cúbicas, polinomiales, racionales y algebraicas. Analizamos también las funciones definidas por partes. Por último se muestra cómo se usan las funciones para representar o modelar situaciones de la vida real.

En el tercer capítulo, *Límites*, presentamos otro concepto fundamental del cálculo: el límite de una función. En él encuentra el lector el álgebra de límites, límites laterales, infinitos y en infinito.

En el cuarto capítulo, *Continuidad*, se utiliza el concepto de límite de una función para tipificar las funciones continuas. Desglosamos las diferentes formas en las que una función puede no ser continua.

En el quinto capítulo, *La derivada*, utilizamos nuevamente el concepto de límite para definir otro concepto fundamental del cálculo: la derivada de una función. Se hace hincapié en la derivada como razón de cambio instantánea de una función. Posteriormente definimos en particular la recta tangente a una curva y la velocidad instantánea de un móvil. Puntualizamos la relación entre derivabilidad y continuidad de una función.

En el sexto capítulo, *Reglas de derivación*, desarrollamos lo siguiente: puesto que la derivada es un límite, y en general es difícil o por lo menos laborioso calcular límites, se presentan distintas reglas que nos permiten calcular la derivada mediante la mera aplicación de fórmulas. Se resalta en particular la regla que nos permite determinar la derivada de una composición de funciones (regla de la cadena) y la derivación de una función definida implícitamente.

En el séptimo capítulo, *Razones de cambio relacionadas*, calculamos la derivada o razón de cambio instantánea de una función a partir de una expresión que vincula la función que derivamos con otras funciones presentes en el contexto de un ejercicio.

En el octavo capítulo, *Aplicaciones de la derivada*, se muestra el uso de la derivada para encontrar cuándo una función crece o decrece (tipo de monotonía), para calcular y clasificar sus puntos críticos (máximos y mínimos) y para describir los intervalos de concavidad de la función.

En el noveno capítulo, *Gráfica de una función*, se articula un gran número de conceptos presentados en los capítulos anteriores para determinar el comportamiento de una función en su dominio y representar la gráfica de la función con mayor precisión.

En el décimo capítulo, *Optimización*, culminamos nuestro estudio con el análisis de una situación real, la cual modelamos mediante una función real de variable real. De esta función se determina dónde alcanza sus valores extremos (su máximo y su mínimo). Es decir, optimizamos un modelo que representa un proceso real.

Ernesto Javier Espinosa Herrera
Coordinador

CAPÍTULO

1

Los números reales

1.1 Algunos tipos de números

Ejercicios 1.1.1 *Expresar el número racional dado mediante una expresión decimal finita (es decir, con periodo 0) o bien periódica infinita:*

1. $\dfrac{3}{8}$.

▼ Dividimos 3 entre 8:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.375\bar{0} \\
\hline
8 & 3.0 \\
 & \ \ 60 \\
 & \ \ \ 40 \\
\end{array}
$$

$$0 \ \Rightarrow \ \frac{3}{8} = 0.375\bar{0} = 0.375\,.$$

□

2. $\dfrac{5}{6}$.

▼ Dividimos 5 entre 6:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.8\bar{3} \\
\hline
6 & 5.0 \\
 & \ \ 20 \\
\end{array}
$$

$$2 \ \Rightarrow \ \frac{5}{6} = 0.833... = 0.8\bar{3}\,.$$

□

3. $\dfrac{-8}{125}$.

▼ Dividimos 8 entre 125:

$$\begin{array}{r|l} & \;0.064\bar{0} \\ \hline 125 & \;8.00 \\ & \;\;500 \\ & \;\;\;\;0 \end{array} \Rightarrow \frac{-8}{125} = -0.064\bar{0} = -0.064\,.$$

□

4. $\dfrac{17}{3}$.

▼ Dividimos 17 entre 3:

$$\begin{array}{r|l} & \;5.\bar{6} \\ \hline 3 & \;17.0 \\ & \;\;20 \\ & \;\;\;\;2 \end{array} \Rightarrow \frac{17}{3} = 5.66... = 5.\bar{6}\,.$$

□

5. $\dfrac{-100}{9}$.

▼ Dividimos 100 entre 9:

$$\begin{array}{r|l} & \;11.\bar{1} \\ \hline 9 & \;100.0 \\ & \;\;10 \\ & \;\;\;\;1 \end{array} \Rightarrow \frac{-100}{9} = -11.11... = -11.\bar{1}\,.$$

□

6. $\dfrac{25}{22}$.

▼ Dividimos 25 entre 22:

$$\begin{array}{r|l} & \;1.1\overline{36} \\ \hline 22 & \;25 \\ & \;\;30 \\ & \;\;\;80 \\ & \;\;\;140 \\ & \;\;\;\;\;8 \end{array} \Rightarrow \frac{25}{22} = 1.13636... = 1.1\overline{36}\,.$$

□

7. $\dfrac{1}{10}$.

▼ Dividimos 1 entre 10:

$$\begin{array}{r|l} & 0.1\overline{0} \\ \hline 10 & 1.0 \\ & 0 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{10} = 0.1\bar{0} = 0.1\,.$$

□

8. $\dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2}$.

▼ Dividimos 1 entre $100 = 10^2$:

$$\begin{array}{r|l} & 0.01\overline{0} \\ \hline 100 & 1.00 \\ & 0 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{100} = 0.01\bar{0} = 0.01\,.$$

□

9. $\dfrac{1}{10^n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

▼ Dividimos 1 entre 10^n:

$$\begin{array}{r|l} & 0.\ \overbrace{0\cdots0}^{(n-1)\text{ ceros}}\ 1\overline{0} \\ \hline 1\,\overbrace{0\cdots0}^{(n)\text{ ceros}} & 1.\ \underbrace{0\cdots0}_{(n-1)\text{ ceros}}\ 0 \\ & 0 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{10^n} = 0.\ \underbrace{0\cdots0}_{(n-1)\text{ ceros}}\ 1\bar{0} = 0.\ \underbrace{0\cdots0}_{(n-1)\text{ ceros}}\ 1\,.$$

□

10. Dé un ejemplo de número entero no natural.

▼ -1. □

11. Dé un ejemplo de número racional no entero.

▼ $\dfrac{1}{2}$, este número se obtiene dividiendo la unidad en dos partes iguales. □

12. ¿Cómo haría para hallar la representación decimal de un número racional de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural?

▼ Dividiendo p entre q. □

13. Transforme la representación decimal periódica $0.\overline{3}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

▼ $0.\overline{3} = \dfrac{1}{3}$.

En efecto:

$$
\begin{aligned}
r &= 0.33333...;\\
10r &= 3.3333... = 3 + 0.33333... = 3 + r;\\
10r - r &= 3;\\
9r &= 3;\\
r &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

□

14. Transforme la representación decimal periódica $0.5\overline{0}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

▼ $0.5\overline{0} = \dfrac{1}{2}$.

En efecto:

$$
\begin{aligned}
r &= 0.5;\\
10r &= 5;\\
r &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

15. Transforme la representación decimal periódica $0.\overline{142857}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

▼ $0.\overline{142857} = \dfrac{1}{7}$.

En efecto:

$$
\begin{aligned}
r &= 0.\overline{142857};\\
1\,000\,000r &= 142\,857.\overline{142857} = 142\,857 + 0.\overline{142857} = 142\,857 + r;\\
1\,000\,000r - r &= 142\,857;\\
999\,999r &= 142\,857;\\
r &= \frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

□

16. Transforme la representación decimal periódica $0.1\overline{3}$ en racional, de la forma $\dfrac{p}{q}$ con p entero y q natural.

▼ $0.1\overline{3} = \dfrac{2}{15}$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
r &= 0.1\overline{3};\\
10r &= 1.\overline{3} = 1 + 0.\overline{3} = 1 + r;\\
100r &= 13.\overline{3} = 13 + 0.\overline{3} = 13 + r;\\
100r - 10r &= 12;\\
90r &= 12;\\
r &= \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

□

17. Transforme la representación decimal periódica $0.2\overline{12}$ en racional, de la forma $\frac{p}{q}$ con p entero y q natural.

▼ $0.2\overline{12} = \frac{7}{33}$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
r &= 0.2\overline{12};\\
10r &= 2.\overline{12} = 2 + 0.\overline{12} = 2 + r;\\
1\,000r &= 212.\overline{12} = 212 + 0.\overline{12} = 212 + r;\\
1\,000r - 10r &= 210;\\
990r &= 210;\\
r &= \frac{210}{990} = \frac{7}{33}.
\end{aligned}$$

Otra forma de resolver:

$$\begin{aligned}
r &= 0.2\overline{12};\\
100r &= 21.2\overline{12} = 21 + 0.2\overline{12} = 21 + r;\\
100r - r &= 21;\\
99r &= 21;\\
r &= \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.
\end{aligned}$$

□

18. Transforme la representación decimal periódica $0.3\overline{123}$ en racional, de la forma $\frac{p}{q}$ con p entero y q natural.

▼ $0.3\overline{123} = \frac{104}{333}$.

En efecto:

$$\begin{aligned}
r &= 0.3\overline{123};\\
10r &= 3.\overline{123} = 3 + 0.\overline{123} = 3 + r;\\
10\,000r &= 3\,123.\overline{123} = 3\,123 + 0.\overline{123} = 3\,123 + r;\\
10\,000r - 10r &= 3\,120;\\
9\,990r &= 3\,120;\\
r &= \frac{3120}{9\,990} = \frac{104}{333}.
\end{aligned}$$

Otra forma de resolver:

$$
\begin{aligned}
r &= 0.3\overline{123};\\
1\,000r &= 312.3\overline{123} = 312 + 0.3\overline{123} = 312 + r;\\
1\,000r - r &= 312;\\
999r &= 312;\\
r &= \frac{312}{999} = \frac{104}{333}.
\end{aligned}
$$

□

1.2 Representación geométrica de los números reales

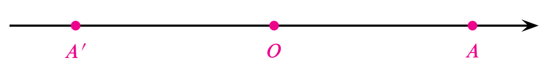
Ejercicios 1.2.1

1. ¿Cuándo se dice que 2 puntos A y A' son simétricos con respecto a un tercero O?

   ▼ Cuando O es el punto medio del segmento rectilíneo AA'. □

2. Dados dos puntos A y O ¿cómo hallaría el simétrico de A con respecto a O?

   ▼ Trazando la recta AO y llevando, a partir de O, una distancia igual a $\overline{AO}$, pero en sentido opuesto:



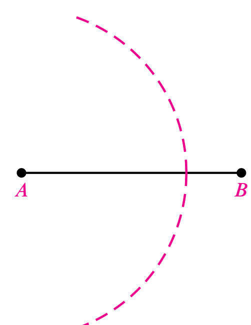
   A' es el simétrico de A con respecto a O. □

3. Con regla y compás ¿cómo divide un segmento en 2 partes iguales?

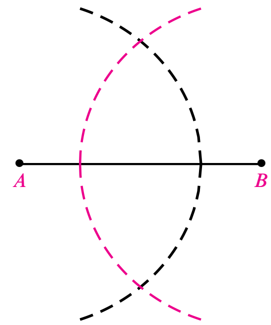
   ▼ Trazando la mediatriz del segmento.

   Para esto usamos regla y compás:

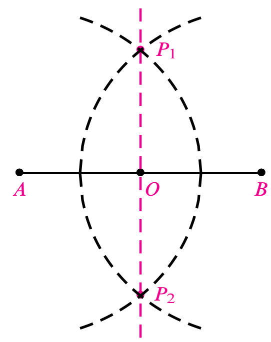
   a. Trazamos una circunferencia con centro en un extremo del segmento y con un radio mayor que la mitad de la distancia entre los extremos.



   b. Después trazamos otra circunferencia con centro en el otro extremo y con el mismo radio.



c. La intersección de las circunferencias determina dos puntos P_1 y P_2 que se encuentran sobre la mediatriz, pues, $\overline{AP_1} = \overline{BP_1}$ & $\overline{AP_2} = \overline{BP_2}$ por construcción. Trazamos la recta que une dichos puntos y obtenemos la mediatriz deseada.

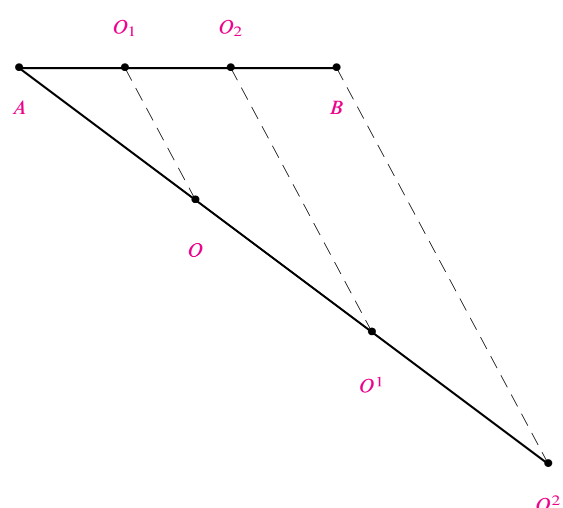


Tenemos entonces: $\overline{AO} = \overline{OB}$. □

4. Con regla y compás ¿cómo divide un segmento en 3 partes iguales?

▼ Sea AB el segmento de recta.

Se traza por A una semirecta en la que se generan tres segmentos de igual magnitud mediante los puntos O, O^1 y O^2. Se traza el segmento O^2B y luego segmentos paralelos desde los puntos O^1 y O hasta el segmento AB, para así determinar los puntos O_1 y O_2.



$\overline{AO} = \overline{OO^1} = \overline{O^1O^2}$ por construcción;

$\overline{OO_1} \,||\, \overline{O^1O_2} \,||\, \overline{O^2B}$ por construcción.

Los triángulos $\triangle AOO_1$, $\triangle AO^1O_2$ y $\triangle AO^2B$ son semejantes porque tienen sus ángulos iguales: el $\angle BAO^2$ es común a los tres y los demás son iguales por ser ángulos internos correspondientes entre paralelas cortadas por una misma secante $\Rightarrow$ $\overline{AO_1} = \overline{O_1O_2} = \overline{O_2B}$; entonces O_1 y O_2 dividen el segmento AB en tres partes iguales.

□

5. ¿Cómo dividiría un segmento en q partes iguales (donde q es un número natural)?

▼ Haciendo lo mismo que en el ejercicio anterior, cambiando 3 por q. □

6. ¿Cómo hallaría el punto en el eje real que le corresponde al número racional $-\dfrac{5}{3}$?

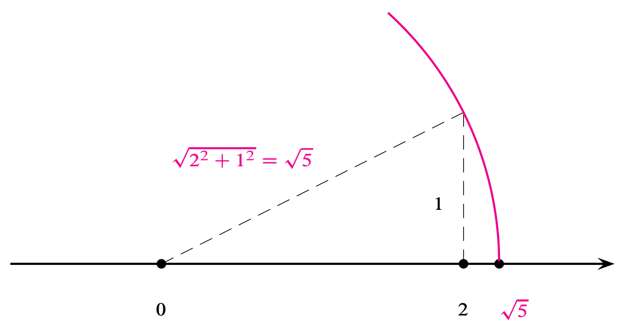
▼ Dividiendo al segmento unitario en 3 partes iguales y llevando una de éstas a la izquierda de 0 (cero), 5 veces. □

7. ¿Cómo hallaría el punto en el eje real que le corresponde al número racional $\dfrac{p}{q}$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y donde $q \in \mathbb{N}$?

▼ Dividiendo al segmento unitario en q partes iguales y llevando una de éstas a la izquierda de 0 (cero), $-p$ veces si $p < 0$ o bien p veces a la derecha de 0 si $p > 0$. □

8. ¿Cómo hallaría el punto en el eje real que le corresponde al número irracional $\sqrt{5}$?

▼



□

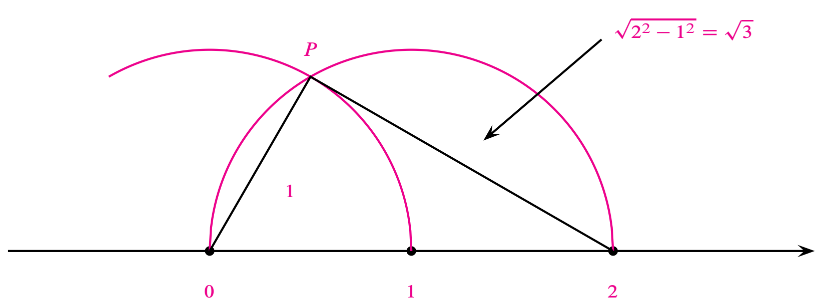
9. ¿Cómo hallaría el punto en el eje real que le corresponde al número irracional $\sqrt{3}$?

▼ Con centro en 0 se traza un arco de circunferencia de radio 1.

Con centro en 1 se traza una semicircunferencia de radio 1.

La intersección de las circunferencias determinan el punto P.

Se traza el triángulo rectángulo con vértices en 0, P y 2.



El triángulo $0P2$ es rectángulo pues el ángulo en P subtiende el diámetro $\overline{02}$ de la circunferencia con centro en 1. □

1.3 Propiedades algebraicas de los números reales

Ejercicios 1.3.1 *Simplificar las expresiones numéricas siguientes:*

1. $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}$.

▼ $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{2}{5}=\frac{(15)(3)+(10)(4)-(6)(2)}{(2)(3)(5)}=\frac{45+40-12}{30}=\frac{73}{30}$. □

2. $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{4}{-15}\right)$.

▼ $\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{4}{-15}\right)=\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{4}{15}\right)=\frac{(3)(4)}{(8)(15)}=\frac{(3)(4)}{(4)(2)(3)(5)}=\frac{1}{(2)(5)}=\frac{1}{10}$. □

3. $\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right)^{-1}$.

▼ $\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{8}{15}\right)^{-1}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{8}{15}}=-\frac{(4)(15)}{(5)(8)}=-\frac{(4)(3)(5)}{(5)(4)(2)}=-\frac{3}{2}$. □

4. $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)$.

▼ $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{10+9}{15}\right)\left(\frac{9-10}{6}\right)=\left(\frac{19}{15}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{19}{(15)(6)}=-\frac{19}{90}$. □

5. $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-1}$.

▼ $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)^{-1}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{9-4}{6}}{\frac{6+1}{4}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{4}}=\frac{(5)(4)}{(6)(7)}=\frac{(5)(2)(2)}{(2)(3)(7)}=\frac{(5)(2)}{(3)(7)}=\frac{10}{21}$. □

6. $(16)^{\frac{4}{5}}(8)^{-\frac{2}{5}}$.

▼ $(16)^{\frac{4}{5}}(8)^{-\frac{2}{5}}=(2^4)^{\frac{4}{5}}(2^3)^{-\frac{2}{5}}=2^{4(\frac{4}{5})}\times 2^{3(-\frac{2}{5})}=2^{\frac{16}{5}}\times 2^{-\frac{6}{5}}=2^{\frac{16}{5}+(-\frac{6}{5})}=2^{\frac{16}{5}-\frac{6}{5}}=2^{\frac{10}{5}}=2^2=4$. □

Ejercicios 1.3.2

1. ¿Cuáles son las soluciones de $x^2=a^2$?

▼ $x^2=a^2 \Leftrightarrow x^2-a^2=0 \Leftrightarrow (x+a)(x-a)=0 \Leftrightarrow x+a=0$ o bien $x-a=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-a$ o bien $x=a$. □

2. Calcule $(x+1)(x+2)(x+3)$.

▼
$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)&=(x^2+3x+2)(x+3)=(x^2+3x+2)x+(x^2+3x+2)3=\\&=x^3+3x^2+2x+3x^2+9x+6=\\&=x^3+6x^2+11x+6.\end{aligned}$$
□

3. ¿Cuáles son las soluciones de $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$?

▼ $x = -1, x = -2$ & $x = -3$,

puesto que tal ecuación se puede escribir como $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$ y esto es cierto si

$$x + 1 = 0 \text{ o bien } x + 2 = 0 \text{ o bien } x + 3 = 0, \text{ esto es, si } x = -1 \text{ o bien } x = -2 \text{ o bien } x = -3\,.$$

□

4. ¿Puede dar una solución o raíz de $x^3 - 8 = 0$?

▼ $x = 2$,

puesto que $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, entonces:

$$x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ o bien } x^2 + 2x + 4 = 0\,.$$

Esta última ecuación de segundo grado ($ax^2 + bx + c = 0$) no tiene raíces reales pues su discriminante $b^2 - 4ac = 4 - 16 < 0$.

Así la única solución o raíz real es $x = 2$. □

5. ¿Puede dar una solución o raíz de $x^3 - a^3 = 0$?

▼ $x = a$, puesto que $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$:

$$x^3 - a^3 = 0 \Leftrightarrow (x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0 \Leftrightarrow x - a = 0 \text{ o bien } x^2 + ax + a^2 = 0\,.$$

Esta última ecuación de segundo grado (cuadrática) no tiene raíces reales pues su discriminante es: $a^2 - 4a^2 < 0$ si $a \neq 0$; así la única raíz o solución real es $x = a$. □

6. ¿Puede dar una raíz de $x^3 + 8 = 0$?

▼ $x = -2$, puesto que

$$x^3 + 8 = 0 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4) \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ o bien } x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Esta última ecuación de segundo grado (cuadrática) no tiene raíces reales pues su discriminante es: $4 - 16 < 0$; $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $x = -2$ es la única raíz de $x^3 + 8 = 0$. □

7. ¿Puede dar una raíz de $x^5 - 32 = 0$?

▼ $x = 2$, puesto que

$$\begin{aligned} &x^5 - 32 = x^5 - 2^5 = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &x - 2 = 0 \text{ o bien } x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 = 0; \\ &x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

□

8. ¿Puede dar una raíz de $x^5 + 32 = 0$?

▼ $x = -2$, puesto que

$$\begin{aligned} &x^5 + 32 = x^5 + 2^5 = (x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &x + 2 = 0 \text{ o bien } x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 = 0; \\ &x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2. \end{aligned}$$

□

9. ¿Puede dar una raíz de $x^4 - 81 = 0$?

▼ $x = 3$, puesto que

$$\begin{aligned} &x^4 - 81 = x^4 - 3^4 = (x-3)(x^3 + 3x^2 + 9x + 27) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &x - 3 = 0 \text{ o bien } x^3 - 3x^2 + 9x - 27 = 0; \\ &x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

De hecho también $x = -3$ es raíz, puesto que

$$\begin{aligned} &x^4 - 81 = (x^2)^2 - (3^2)^2 = (x^2 + 3^2)(x^2 - 3^2) = (x^2 + 9)(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + 9 = 0 \text{ o bien } x^2 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} &x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &x + 3 = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0, \text{ es decir, si } x = -3 \text{ o bien } x = 3. \end{aligned}$$

Éstas son las únicas raíces reales, pues $x^2 + 9 \neq 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. □

1.4 Orden de los números reales

Ejercicios 1.4.1 *Determinar la relación de orden que hay entre los racionales siguientes:*

1. $\frac{11}{5}$ y $\frac{20}{9}$.

▼ Se tiene

$$\begin{aligned} &11 \times 9 = 99\ \&\ 5 \times 20 = 100; \\ &99 < 100 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 11 \times 9 < 5 \times 20 \Rightarrow \frac{11}{5} < \frac{20}{9}. \end{aligned}$$

□

2. $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{13}$.

▼ Se tiene

$$\begin{aligned} &2 \times 13 = 26\ \&\ 3 \times 8 = 24; \\ &26 > 24 \Rightarrow 2 \times 13 > 3 \times 8 \Rightarrow \frac{2}{3} > \frac{8}{13}. \end{aligned}$$

□

3. $\frac{441}{189}$ y $\frac{7}{3}$.

▼ Se tiene

$$\begin{aligned} &441 \times 3 = 1\,323\ \&\ 189 \times 7 = 1\,323; \\ &1\,323 = 1\,323 \Rightarrow 441 \times 3 = 189 \times 7 \Rightarrow \frac{441}{189} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

□

4. $-\dfrac{10}{3}$ y $-\dfrac{33}{10}$.

▼ Se tiene $-\dfrac{10}{3} = \dfrac{-10}{3}$ & $-\dfrac{33}{10} = \dfrac{-33}{10}$, entonces:

$$(-10)(10) = -100 \;\&\; (3)(-33) = -99;$$
$$-100 < -99 \Rightarrow (-10)(10) < (3)(-33) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-10}{3} < \frac{-33}{10}.$$

□

5. $-\dfrac{126}{315}$ y $-\dfrac{2}{5}$.

▼ Se tiene $-\dfrac{126}{315} = \dfrac{-126}{315}$ & $-\dfrac{2}{5} = \dfrac{-2}{5}$, entonces:

$$(-126)(5) = -630 \;\&\; (315)(-2) = -630;$$
$$-630 = -630 \Rightarrow (-126)(5) = (315)(-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-126}{315} = \frac{-2}{5}.$$

□

6. $-\dfrac{25}{46}$ y $-\dfrac{6}{11}$.

▼ Se tiene $-\dfrac{25}{46} = \dfrac{-25}{46}$ & $-\dfrac{6}{11} = \dfrac{-6}{11}$, entonces:

$$(-25)(11) = -275 \;\&\; (46)(-6) = -276;$$
$$-275 > -276 \Rightarrow (-25)(11) > (46)(-6) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-25}{46} > \frac{-6}{11}.$$

□

7. Si a, b son dos números reales tales que $a^2 + b^2 = 0$, ¿qué se puede inferir acerca de estos dos números a, b?

▼ Ya que

$$a^2 \geq 0 \;\&\; b^2 \geq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0;\; b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ y también } b = 0\,.$$

□

8. Si a, b son números reales tales que $a \geq b$ & $a \leq b$, ¿qué se puede inferir acerca de a, b?

▼ $a \geq b \Rightarrow a > b$ o bien $a = b$ & $a \leq b \Rightarrow a < b$ o bien $a = b$

Por la ley de tricotomía:

$$a > b \;\&\; a < b \;\text{ no pueden suceder simultaneamente,}$$

por lo tanto: $a = b$. □

Ejercicios 1.4.2

1. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8 + c \quad ? \quad 5 + c, \text{ donde } c \in \mathbb{R}.$$

▼ $8 > 5 \Leftrightarrow 8 + c > 5 + c.$ □

2. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8c \quad ? \quad 5c, \text{ donde } c > 0.$$

▼ $8 > 5 \;\&\; c > 0 \Rightarrow 8c > 5c.$ □

3. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8c \quad ? \quad 5c, \text{ donde } c < 0.$$

▼ $8 > 5 \;\&\; c < 0 \Rightarrow 8c < 5c.$ □

4. Como $8 > 5$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$8 + 8 \quad ? \quad 5 + 5.$$

▼ $8 > 5 \;\&\; 8 > 5 \Rightarrow 8 + 8 > 5 + 5.$ □

5. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$5^{14} \quad ? \quad 0^{14} (= 0).$$

▼ $5 > 0 \Rightarrow 5^{14} > 0.$ □

6. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$5^{13} \quad ? \quad 0.$$

▼ $5 > 0 \Rightarrow 5^{13} > 0.$ □

7. Como $5 > 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$-5 \quad ? \quad 0.$$

▼ $5 > 0 \Rightarrow (-1)5 < (-1)0 \Rightarrow -5 < 0.$ □

8. Como $-5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-5)^{14} \quad ? \quad 0.$$

▼ $-5 < 0 \Rightarrow (-5)^{14} > 0$, ya que $(-5)^{14} = 5^{14}$. □

9. Como $-5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-5)^{13} \quad ? \quad 0.$$

▼ $-5 < 0 \Rightarrow (-5)^{13} < 0$, ya que $(-5)^{13} = -5^{13}$. □

10. Como $-8 < -5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-8)^2 \quad ? \quad (-5)^2.$$

▼ $-8 < -5 < 0 \Rightarrow (-8)^2 > (-5)^2$, pues $(-8)^2 = 64$ y también $(-5)^2 = 25$. □

11. Como $-8 < -5 < 0$, sustituya el signo ? por el signo que proceda en la siguiente desigualdad:

$$(-8)^3 \quad ? \quad (-5)^3.$$

▼ $-8 < -5 < 0 \Rightarrow (-8)^3 < (-5)^3 < 0$. En efecto: $(-8)^3 = -512$ y también $(-5)^3 = -125$. □

12. ¿Cómo es el producto de dos números positivos?

▼ Positivo. □

13. ¿Cómo es el producto de un número positivo por un negativo?

▼ Negativo, pues si el producto fuese positivo, como uno de los factores es positivo, el otro tendría que ser positivo. □

14. ¿Cómo es el producto de dos números negativos?

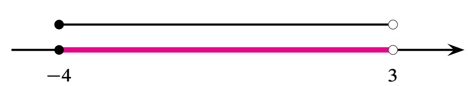
▼ Positivo. □

1.5 Intervalos

Ejercicios 1.5.1 *Escribir las siguientes desigualdades con notación de intervalo y representarlas geométricamente:*

1. $-4 \leq x < 3$.

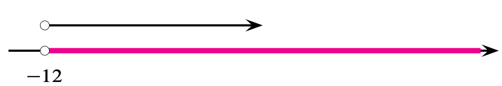
▼ $\{\, x \mid -4 \leq x < 3 \,\} = [-4, 3)$.



□

2. $x > -12$.

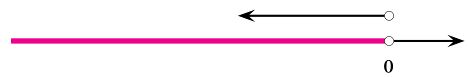
▼ $\{\, x \mid x > -12 \,\} = (-12, +\infty)$.



□

3. $x < 0$.

▼ $\{\, x \mid x < 0 \,\} = (-\infty, 0)$.



□

4. $\pi < x \leq 8$.

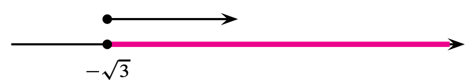
▼ $\{\, x \mid \pi < x \leq 8 \,\} = (\pi, 8]$.



□

5. $x \geq -\sqrt{3}$.

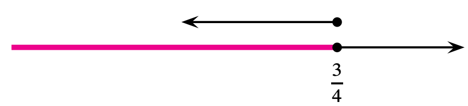
▼ $\left\{\, x \mid x \geq -\sqrt{3} \,\right\} = \left[-\sqrt{3}, +\infty\right)$.



□

6. $x \leq \dfrac{3}{4}$.

▼ $\left\{\, x \mid x \leq \dfrac{3}{4} \,\right\} = \left(-\infty, \dfrac{3}{4}\right]$.



□

7. $-\dfrac{2}{3} < x < 1$.

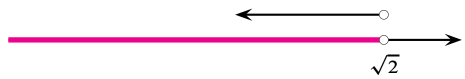
▼ $\left\{\, x \mid -\dfrac{2}{3} < x < 1 \,\right\} = \left(-\dfrac{2}{3}, 1\right)$.



□

8. $x < \sqrt{2}$.

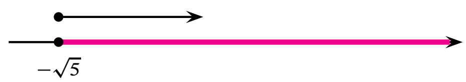
▼ $\left\{ x \mid x < \sqrt{2} \right\} = \left(-\infty, \sqrt{2}\right)$.



□

9. $-\sqrt{5} \le x$.

▼ $\left\{ x \mid -\sqrt{5} \le x \right\} = \left[-\sqrt{5}, +\infty\right)$.



□

10. $-1 \le x \le 5$.

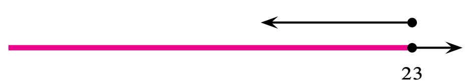
▼ $\left\{ x \mid -1 \le x \le 5 \right\} = [-1, 5]$.



□

11. $x \le 23$.

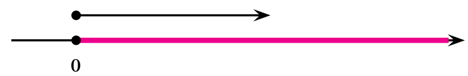
▼ $\left\{ x \mid x \le 23 \right\} = (-\infty, 23]$.



□

12. $0 \leq x$.

▼ $\{\, x \mid 0 \leq x \,\} = [0, +\infty)$.

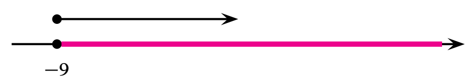


□

Escribir los siguientes intervalos como una desigualdad y representarlos geométricamente:

13. $[-9, +\infty)$.

▼ $[-9, +\infty) = \{\, x \mid -9 \leq x \,\} \;\Rightarrow\; x \geq -9$.



□

14. $[-10, -1)$.

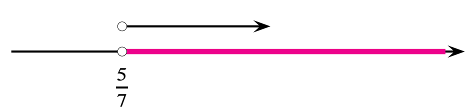
▼ $[-10, -1) = \{\, x \mid -10 \leq x < -1 \,\} \;\Rightarrow\; -10 \leq x < -1$.



□

15. $\left(\dfrac{5}{7}, +\infty\right)$.

▼ $\left(\dfrac{5}{7}, +\infty\right) = \left\{ x \,\middle|\, \dfrac{5}{7} < x \right\} \;\Rightarrow\; x > \dfrac{5}{7}$.



□

16. $(-2, 16]$.

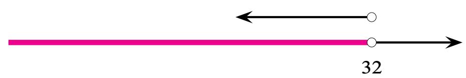
▼ $(-2, 16] = \{\, x \mid -2 < x \leq 16 \,\} \Rightarrow -2 < x \leq 16.$



□

17. $(-\infty, 32)$.

▼ $(-\infty, 32) = \{\, x \mid x < 32 \,\} \Rightarrow x < 32.$



□

18. $\left(\frac{1}{3}, 15\right)$.

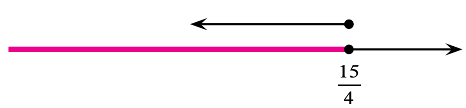
▼ $\left(\frac{1}{3}, 15\right) = \left\{ x \,\middle|\, \frac{1}{3} < x < 15 \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 15.$



□

19. $\left(-\infty, \frac{15}{4}\right]$.

▼ $\left(-\infty, \frac{15}{4}\right] = \left\{ x \,\middle|\, x \leq \frac{15}{4} \right\} \Rightarrow x \leq \frac{15}{4}.$



□

20. $\left[-\frac{4}{3}, \frac{9}{2}\right]$.

▼ $\left[-\frac{4}{3}, \frac{9}{2}\right] = \left\{ x \,\middle|\, -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{9}{2} \right\} \Rightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{9}{2}.$



□

Expresar como una desigualdad y con notación de intervalo los siguientes segmentos de la recta numérica:

21.



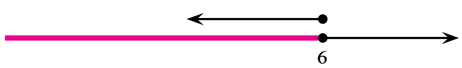
▼ $\{\, x \mid -13 < x \,\} = (-13, +\infty)$. □

22.



▼ $\{\, x \mid 1 < x \leq 22 \,\} = (1, 22]$. □

23.



▼ $\{\, x \mid x \leq 6 \,\} = (-\infty, 6]$. □

24.



▼ $\left\{ x \mid -16 < x < -\frac{3}{2} \right\} = \left(-16, -\frac{3}{2}\right)$. □

25.



▼ $\left\{ x \mid 0 \leq x \leq \frac{8}{3} \right\} = \left[0, \frac{8}{3}\right]$. □

26.



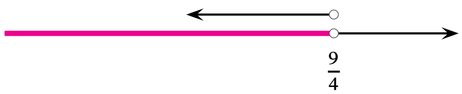
▼ $\{\, x \mid -1 \leq x \,\} = [-1, +\infty)$. □

27.



▼ $\{\, x \mid -5 \le x < 5 \,\} = [-5, 5)$. □

28.

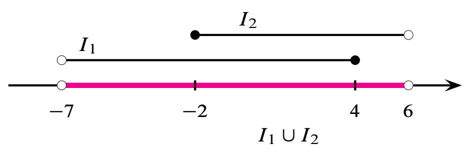


▼ $\left\{ x \,\middle|\, x < \frac{9}{4} \right\} = \left(-\infty, \frac{9}{4} \right)$. □

Dados los intervalos $I_1 = (-7, 4]$, $I_2 = [-2, 6)$, $I_3 = (-\infty, 1]$, $I_4 = (0, +\infty)$, $I_5 = (-4, 2)$ & $I_6 = [2, 8]$, *determinar:*

29. $I_1 \cup I_2$.

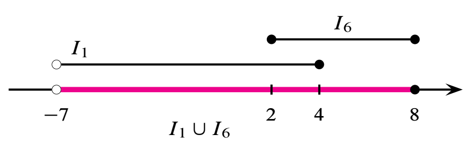
▼ $I_1 \cup I_2 = (-7, 4] \cup [-2, 6) = (-7, 6)$.



□

30. $I_1 \cup I_6$.

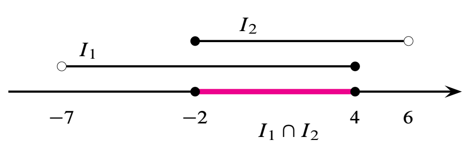
▼ $I_1 \cup I_6 = (-7, 4] \cup [2, 8] = (-7, 8]$.



□

31. $I_1 \cap I_2$.

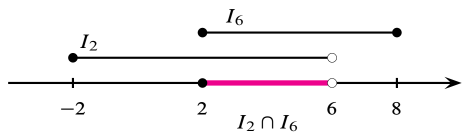
▼ $I_1 \cap I_2 = (-7, 4] \cap [-2, 6) = [-2, 4]$.



□

32. $I_2 \cap I_6$.

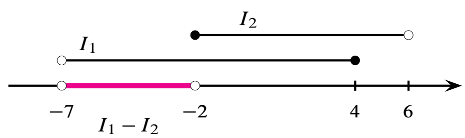
▼ $I_2 \cap I_6 = [-2, 6) \cap [2, 8] = [2, 6)$.



□

33. $I_1 - I_2$.

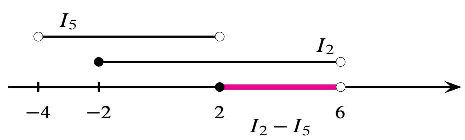
▼ $I_1 - I_2 = (-7, 4] - [-2, 6) = (-7, -2)$.



□

34. $I_2 - I_5$.

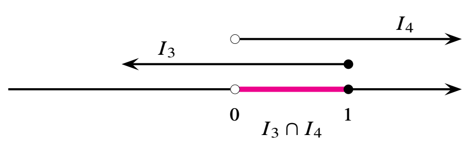
▼ $I_2 - I_5 = [-2, 6) - (-4, 2) = [2, 6)$.



□

35. $I_3 \cap I_4$.

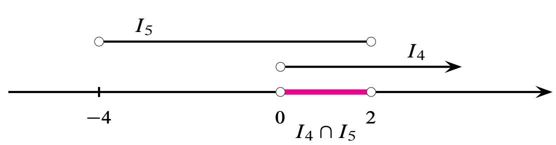
▼ $I_3 \cap I_4 = (-\infty, 1] \cap (0, +\infty) = (0, 1]$.



□

36. $I_4 \cap I_5$.

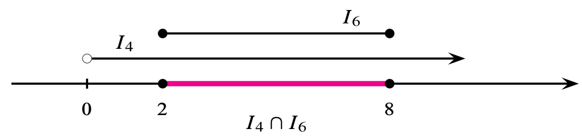
▼ $I_4 \cap I_5 = (0, +\infty) \cap (-4, 2) = (0, 2)$.



□

37. $I_4 \cap I_6$.

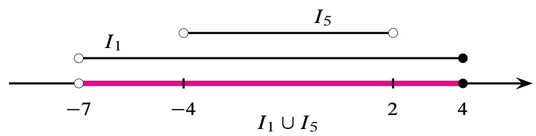
▼ $I_4 \cap I_6 = (0, +\infty) \cap [2, 8] = [2, 8]$.



□

38. $I_1 \cup I_5$.

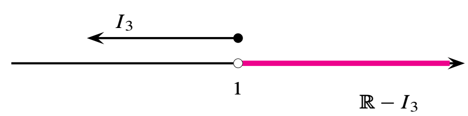
▼ $I_1 \cup I_5 = (-7, 4] \cup (-4, 2) = (-7, 4]$.



□

39. $\mathbb{R} - I_3$.

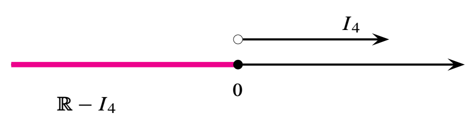
▼ $\mathbb{R} - I_3 = \mathbb{R} - (-\infty, 1] = (1, +\infty)$.



□

40. $\mathbb{R} - I_4$.

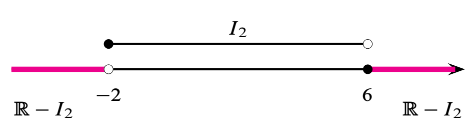
▼ $\mathbb{R} - I_4 = \mathbb{R} - (0, +\infty) = (-\infty, 0]$.



□

41. $\mathbb{R} - I_2$.

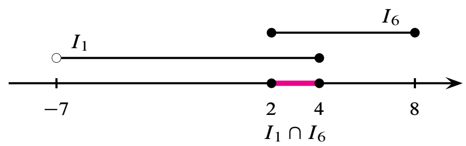
▼ $\mathbb{R} - I_2 = \mathbb{R} - [-2, 6) = (-\infty, -2) \cup [6, +\infty)$.



□

42. $I_1 \cap I_6$.

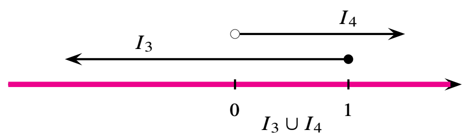
▼ $I_1 \cap I_6 = (-7, 4] \cap [2, 8] = [2, 4]$.



□

43. $I_3 \cup I_4$.

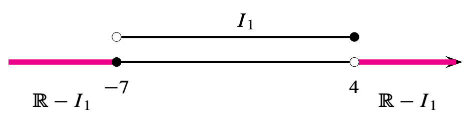
▼ $I_3 \cup I_4 = (-\infty, 1] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}$.



□

44. $\mathbb{R} - I_1$.

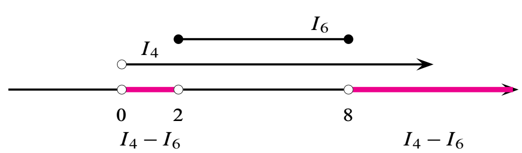
▼ $\mathbb{R} - I_1 = \mathbb{R} - (-7, 4] = (-\infty, -7] \cup (4, +\infty)$.



□

45. $I_4 - I_6$.

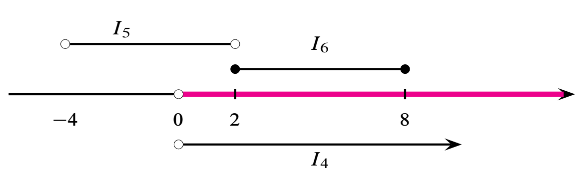
▼ $I_4 - I_6 = (0, +\infty) - [2, 8] = (0, 2) \cup (8, +\infty)$.



□

46. $(I_5 \cap I_6) \cup I_4$.

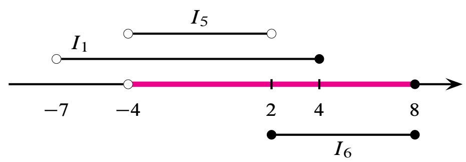
▼ $(I_5 \cap I_6) \cup I_4 = \{(-4, 2) \cap [2, 8]\} \cup (0, +\infty) = \varnothing \cup (0, +\infty) = (0, +\infty)$.



□

47. $(I_1 \cap I_5) \cup I_6$.

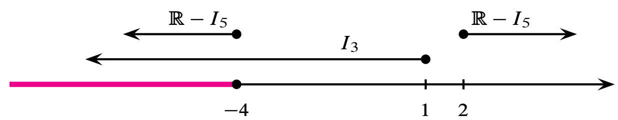
▼ $(I_1 \cap I_5) \cup I_6 = \{(-7, 4] \cap (-4, 2)\} \cup [2, 8] = (-4, 2) \cup [2, 8] = (-4, 8]$.



□

48. $I_3 \cap (\mathbb{R} - I_5)$.

▼ $I_3 \cap (\mathbb{R} - I_5) = (-\infty, 1] \cap \{\mathbb{R} - (-4, 2)\} = (-\infty, 1] \cap \{(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)\} = (-\infty, -4]$.



□

1.6 Valor absoluto

Ejercicios 1.6.1 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

1. $|x| = \sqrt{2}$.

▼ Los números que cumplen la ecuación $|x| = \sqrt{2}$ son $x = -\sqrt{2}$ & $x = \sqrt{2}$. □

2. $|2x| = 6$.

▼ $|2x| = 6 \Leftrightarrow 2x = -6$ o bien $2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$ o bien $x = 3$.

Los números que cumplen la ecuación $|2x| = 6$ son $x = -3$ & $x = 3$. □

3. $\left|\dfrac{3x}{2}\right| = 3$.

▼ $$\left|\frac{3x}{2}\right| = 3 \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = -3 \text{ o bien } \frac{3x}{2} = 3 \Leftrightarrow x = -3\left(\frac{2}{3}\right) \text{ o bien } x = 3\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ o bien } x = 2\,.$$

Los números que cumplen la ecuación $\left|\dfrac{3x}{2}\right| = 3$ son $x = -2$ & $x = 2$. □

4. $\left|-\dfrac{5x}{4}\right| = 1$.

▼ $\left|-\dfrac{5x}{4}\right| = 1 \Leftrightarrow -\dfrac{5x}{4} = -1$ o bien $-\dfrac{5x}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$ o bien $x = -\dfrac{4}{5}$.

Los números que cumplen la ecuación $\left|-\dfrac{5x}{4}\right| = 1$ son $x = \dfrac{4}{5}$ & $x = -\dfrac{4}{5}$. □

5. $|x + 2| = 4$.

▼ $|x + 2| = 4 \Leftrightarrow x + 2 = -4$ o bien $x + 2 = 4 \Leftrightarrow x = -6$ o bien $x = 2$.

Los números que cumplen la ecuación $|x + 2| = 4$ son $x = -6$ & $x = 2$. □

6. $|\,1 - x\,| = 1$.

▼ $|\,1 - x\,| = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 - x = -1$ o bien $1 - x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 2$ o bien $x = 0$.

Los números que cumplen la ecuación $|\,1 - x\,| = 1$ son $x = 2$ & $x = 0$. □

7. $|\,2x + 3\,| = 5$.

▼ $|\,2x + 3\,| = 5 \;\Leftrightarrow\; 2x + 3 = -5$ o bien $2x + 3 = 5 \;\Leftrightarrow\; 2x = -8$ o bien $2x = 2 \;\Leftrightarrow\; x - 4$ o bien $x = 1$.

Los números que cumplen la ecuación $|\,2x + 3\,| = 5$ son $x = -4$ & $x = 1$. □

8. $|\,2 - 3x\,| = 8$.

▼ $|\,2 - 3x\,| = 8 \;\Leftrightarrow\; 2 - 3x = -8$ o bien $2 - 3x = 8 \;\Leftrightarrow\; -3x = -10$ o bien $-3x = 6 \;\Leftrightarrow$ Los números

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{10}{3} \text{ o bien } x = -2\,.$$

que cumplen la ecuación $|\,2 - 3x\,| = 8$ son $x = \dfrac{10}{3}$ & $x = -2$. □

9. $\left|\,x^2 - 9\,\right| = 0$.

▼ $\left|\,x^2 - 9\,\right| = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| = 3 \;\Leftrightarrow\; x = -3$ o bien $x = 3$.

Los números que cumplen la ecuación $\left|\,x^2 - 9\,\right| = 0$ son $x = -3$ & $x = 3$. □

10. $\left|\,x^2 - x - 4\,\right| = 2$.

▼ $\left|\,x^2 - x - 4\,\right| = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 4 = -2$ o bien $x^2 - x - 4 = 2$.

a. $x^2 - x - 4 = -2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\; (x + 1)(x - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 1 = 0 \text{ o bien } x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x = -1 \text{ o bien } x = 2\,.$$

b. $x^2 - x - 4 = 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow$

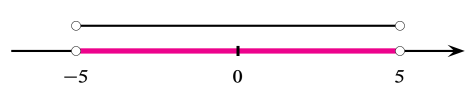
$$\Leftrightarrow\; (x + 2)(x - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 2 = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x = -2 \text{ o bien } x = 3\,.$$

Los números que cumplen la ecuación $\left|\,x^2 - x - 4\,\right| = 2$ son $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$ & $x = 3$. □

Utilizando el concepto de distancia entre dos números $d(x, a) = |\,x - a\,|$, obtener los números $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen:

11. $|\,x\,| < 5$.

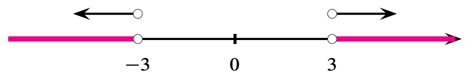
▼ $|\,x\,| < 5 \;\Leftrightarrow\; |\,x - 0\,| < 5 \;\Leftrightarrow\; d(x, 0) < 5 \;\Leftrightarrow\; -5 < x < 5$.



□

12. $|\,x\,| > 3$.

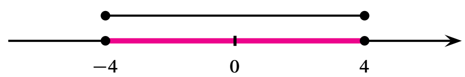
▼ $|\,x\,| > 3 \;\Leftrightarrow\; |\,x - 0\,| > 3 \;\Leftrightarrow\; d(x, 0) > 3 \;\Leftrightarrow\; x < -3$ o bien $3 < x$.



□

13. $|\,x\,| \leq 4$.

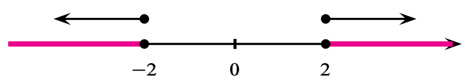
▼ $|\,x\,| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; |\,x - 0\,| \leq 4 \;\Leftrightarrow\; d(x, 0) \leq 4 \;\Leftrightarrow\; -4 \leq x \leq 4$.



□

14. $|\,x\,| \geq 2$.

▼ $|\,x\,| \geq 2 \;\Leftrightarrow\; |\,x - 0\,| \geq 2 \;\Leftrightarrow\; d(x, 0) \geq 2 \;\Leftrightarrow\; x \leq -2$ o bien $x \geq 2$.



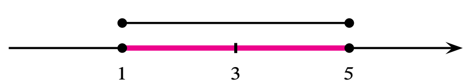
□

15. $|\,x\,| < -1$.

▼ $|\,x\,| < -1 \;\Leftrightarrow\; |\,x - 0\,| < -1 \;\Leftrightarrow\; d(x, 0) < -1 \;\Rightarrow\; d(x, 0) < 0$, lo cual nunca sucede, ya que no hay distancias negativas. Entonces no hay $x \in \mathbb{R}$ tales que $|\,x\,| < -1$. □

16. $|\,x - 3\,| \leq 2$.

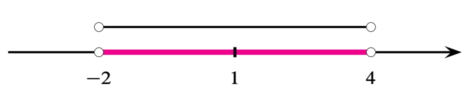
▼ $|\,x - 3\,| \leq 2 \;\Leftrightarrow\; d(x, 3) \leq 2 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq x \leq 5$.



□

17. $|\,x - 1\,| < 3$.

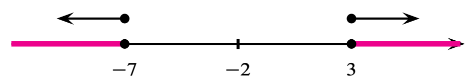
▼ $|\,x - 1\,| < 3 \;\Leftrightarrow\; d(x, 1) < 3 \;\Leftrightarrow\; -2 < x < 4$.



□

18. $|\, x + 2\,| \geq 5$.

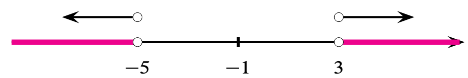
▼ $|\, x + 2\,| \geq 5 \;\Leftrightarrow\; |\, x - (-2)\,| \geq 5 \;\Leftrightarrow\; d(x, -2) \geq 5 \;\Leftrightarrow\; x \leq -7$ o bien $3 \leq x$.



□

19. $|\, x + 1\,| > 4$.

▼ $|\, x + 1\,| > 4 \;\Leftrightarrow\; |\, x - (-1)\,| > 4 \;\Leftrightarrow\; d(x, -1) > 4 \;\Leftrightarrow\; x < -5$ o bien $3 < x$.

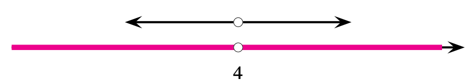


□

20. $|\, x - 4\,| > 0$.

▼ $|\, x - 4\,| > 0 \;\Leftrightarrow\; d(x, 4) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 4$;

pues para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $d(x, 4) \geq 0$ & $d(x, 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4$.



□

1.7 Resolución de desigualdades

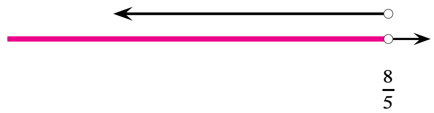
1.7.2 Desigualdades del tipo $ax + b \geq cx + d$

Ejercicios 1.7.2 *Resolver las siguientes desigualdades:*

1. $1 - 2x > \dfrac{x}{2} - 3$.

▼
$$1 - 2x > \frac{x}{2} - 3 \;\Rightarrow\; -2x - \frac{x}{2} > -3 - 1 \;\Rightarrow\; \frac{-4x - x}{2} > -4 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -4x - x > -4 \times 2 \;\Rightarrow\; -5x > -8 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \left(-\frac{1}{5}\right)(-5x) < \left(-\frac{1}{5}\right)(-8) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x < \frac{-8}{-5} \;\Rightarrow\; x < \frac{8}{5}.$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\infty, \dfrac{8}{5}\right)$.



□

2. $-5x - 4 \geq 3 - 6x$.

▼ $-5x - 4 \geq 3 - 6x \Rightarrow -5x + 6x \geq 3 + 4 \Rightarrow x \geq 7$.

El conjunto solución es: $CS = [7, +\infty)$.

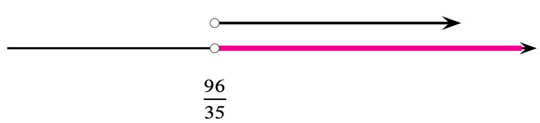


□

3. $\dfrac{-3}{4}x + \dfrac{5}{3} < \dfrac{2}{9}x - 1$.

▼ $$\frac{-3}{4}x + \frac{5}{3} < \frac{2}{9}x - 1 \Rightarrow \frac{-3}{4}x - \frac{2}{9}x < -\frac{5}{3} - 1 \Rightarrow \frac{-27x - 8x}{36} < \frac{-5-3}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-35x}{36} < \frac{-8}{3} \Rightarrow -35x < \frac{-8}{3}(36) \Rightarrow -35x < -96 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x > \frac{-96}{-35} \Rightarrow x > \frac{96}{35}.$$

El conjunto solución es: $CS = \left(\dfrac{96}{35}, +\infty\right)$.



□

4. $3 - 5x \leq 6 - 5x$.

▼ $3 - 5x \leq 6 - 5x \Leftrightarrow -5x + 5x \leq 6 - 3 \Leftrightarrow 0 \leq 3$. Siempre se cumple.

El conjunto solución es: $CS = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. □

5. $\dfrac{3}{2}x - 5 > 1 + \dfrac{3}{2}x$.

▼ $\dfrac{3}{2}x - 5 > 1 + \dfrac{3}{2}x \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}x > 1 + 5 \Leftrightarrow 0 > 6$. Nunca se cumple.

El conjunto solución es: $CS = \emptyset$ el conjunto vacío . □

6. $2(x + 3) > 3(x - 1) + 6$.

▼ $$2(x + 3) > 3(x - 1) + 6 \Leftrightarrow 2x + 6 > 3x - 3 + 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 3x > -3 + 6 - 6 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3.$$

El conjunto solución es: $CS = (-\infty, 3)$.



□

1.7.3 Desigualdades del tipo $a_1x + b_1 \geq a_2x + b_2 \geq a_3x + b_3$

Ejercicios 1.7.3 *Resolver las siguientes desigualdades:*

1. $1 < 3x + 4 \leq 16$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$\begin{array}{rccccl} & 1 < 3x + 4 & \& & 3x + 4 \leq 16 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 1 - 4 < 3x & \& & 3x \leq 16 - 4 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -3 < 3x & \& & 3x \leq 12 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{-3}{3} < x & \& & x \leq \frac{12}{3} & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & -1 < x & \& & x \leq 4 . & \end{array}$$

El conjunto solución es: $CS = (-1, 4]$.



Otra forma,

$$1 < 3x + 4 \leq 16 \Leftrightarrow 1 - 4 < 3x + 4 - 4 \leq 16 - 4 \Leftrightarrow -3 < 3x \leq 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3}{3} < x \leq \frac{12}{3} \Leftrightarrow -1 < x \leq 4 \Leftrightarrow x \in (-1, 4] .$$

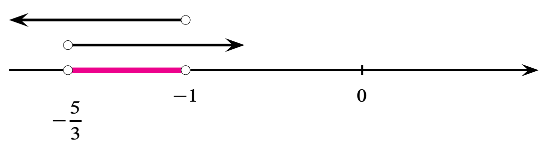
□

2. $-1 < 3x + 4 < 1$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$
\begin{array}{rrcll}
 & -1 < 3x + 4 & \& & 3x + 4 < 1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & -1 - 4 < 3x & \& & 3x < 1 - 4 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & -5 < 3x & \& & 3x < -3 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{-5}{3} < x & \& & x < \frac{-3}{3} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{-5}{3} < x & \& & x < -1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right) & \& & x \in (-\infty, -1)\,. &
\end{array}
$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right) \cap (-\infty, -1) = \left(-\frac{5}{3}, -1\right)$.



Otra forma,

$$-1 < 3x + 4 < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 - 4 < 3x + 4 - 4 < 1 - 6 \;\Leftrightarrow\; -5 < 3x < -3 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; -\frac{5}{3} < x < -1 \;\Leftrightarrow\; x \in \left(-\frac{5}{3}, -1\right).$$

□

3. $1 < 3x + 4 < -1$.

▼ Lo podemos resolver directamente, pues si $CS \neq \emptyset$, habría un elemento $x \in CS$ tal que $1 < 3x + 4 < -1$, por lo que por transitividad $1 < -1$, lo cual es imposible; luego, $CS = \emptyset$.

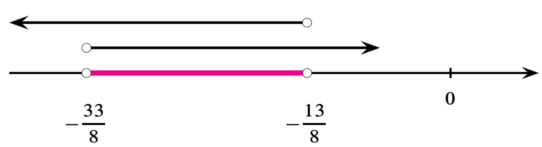
□

4. $\frac{7}{2} > \frac{1-4x}{5} > \frac{3}{2}$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$
\begin{array}{rrcrr}
 & \frac{7}{2} > \frac{1-4x}{5} & \& & \frac{1-4x}{5} > \frac{3}{2} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{5\times 7}{2} > 1-4x & \& & 1-4x > \frac{3\times 5}{2} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{35}{2} > 1-4x & \& & -4x > \frac{15}{2}-1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{35}{2}-1 > -4x & \& & -4x > \frac{15-2}{2} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{35-2}{2} > -4x & \& & x < \frac{13}{2\times(-4)} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \frac{33}{2\times(-4)} < x & \& & x < -\frac{13}{8} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \left(-\frac{33}{8}, +\infty\right) & \& & x \in \left(-\infty, -\frac{13}{8}\right). &
\end{array}
$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\frac{33}{8}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, -\frac{13}{8}\right) = \left(-\frac{33}{8}, -\frac{13}{8}\right)$.



Otra forma,

$$
\frac{7}{2} > \frac{1-4x}{5} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{7(10)}{2} > \frac{1-4x}{5}(10) > \frac{3(10)}{2} \Leftrightarrow 35 > 2-8x > 15 \Leftrightarrow
$$
$$
\Leftrightarrow 33 > -8x > 13 \Leftrightarrow -\frac{33}{8} < x < -\frac{13}{8} \Leftrightarrow
$$
$$
\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{33}{8}, -\frac{13}{8}\right).
$$

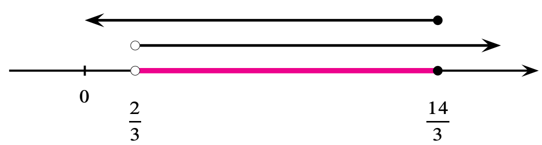
□

5. $-5 \le \dfrac{4-3x}{2} < 1.$

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$
\begin{array}{rrcll}
 & -5 \le \dfrac{4-3x}{2} & \& & \dfrac{4-3x}{2} < 1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & -5 \times 2 \le 4-3x & \& & 4-3x < 1 \times 2 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & -10-4 \le -3x & \& & -3x < 2-4 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \dfrac{-14}{-3} \ge x & \& & -3x < -2 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \dfrac{14}{3} \ge x & \& & x > \dfrac{-2}{-3} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \le \dfrac{14}{3} & \& & x > \dfrac{2}{3} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \left(-\infty, \dfrac{14}{3}\right] & \& & x \in \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right). &
\end{array}
$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\infty, \dfrac{14}{3}\right] \cap \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{14}{3}\right].$



Otra forma,

$$
-5 \le \frac{4-3x}{2} < 1 \Leftrightarrow -5(2) \le \left(\frac{4-3x}{2}\right)(2) < 1(2) \Leftrightarrow -10 \le 4-3x < 2 \Leftrightarrow -14 \le -3x < -2 \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow \frac{-14}{-3} \ge \frac{-3x}{-3} > \frac{-2}{-3} \Leftrightarrow \frac{14}{3} \ge x > \frac{2}{3} \Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right].
$$

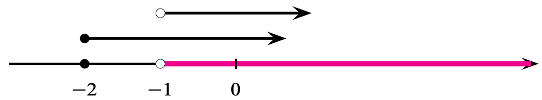
□

6. $6x + 5 \ge 4x + 1 > x - 2.$

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$
\begin{array}{rrcll}
 & 6x+5 \ge 4x+1 & \& & 4x+1 > x-2 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 6x-4x \ge 1-5 & \& & 4x-x > -2-1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 2x \ge -4 & \& & 3x > -3 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \ge -\dfrac{4}{2} & \& & x > -\dfrac{3}{3} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \ge -2 & \& & x > -1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in [-2, +\infty] & \& & x \in (-1, +\infty). &
\end{array}
$$

El conjunto solución es: $CS = [-2, +\infty) \cap (-1, +\infty) = (-1, +\infty)$.



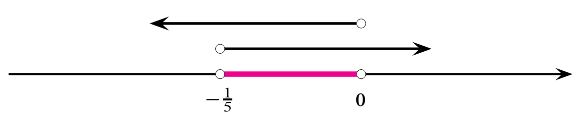
□

7. $3 - 2x < 3x + 4 < 4 - x$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$
\begin{array}{rrcll}
 & 3 - 2x < 3x + 4 & \& & 3x + 4 < 4 - x & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & -2x - 3x < 4 - 3 & \& & 3x + x < 4 - 4 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & -5x < 1 & \& & 4x < 0 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x > -\dfrac{1}{5} & \& & x < \dfrac{0}{4} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x > -\dfrac{1}{5} & \& & x < 0 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \left(-\dfrac{1}{5}, +\infty\right) & \& & x \in (-\infty, 0)\,. &
\end{array}
$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\frac{1}{5}, +\infty\right) \cap (-\infty, 0) = \left(-\frac{1}{5}, 0\right)$.



□

8. $\dfrac{2}{3}x + 5 \le 8 - \dfrac{3}{4}x \le 7 + \dfrac{4}{5}x$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{3}x + 5 \le 8 - \frac{3}{4}x & \& \quad & 8 - \frac{3}{4}x \le 7 + \frac{4}{5}x & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x \le 8 - 5 & \& \quad & -\frac{3}{4}x - \frac{4}{5}x \le 7 - 8 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{8x + 9x}{12} \le 3 & \& \quad & \frac{-15x - 16x}{20} \le -1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{17x}{12} \le 3 & \& \quad & -31x \le -1(20) & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 17x \le 3(12) & \& \quad & x \ge \frac{-20}{-31} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & 17x \le 36 & \& \quad & x \ge \frac{20}{31} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x \le \frac{36}{17} & \& \quad & x \ge \frac{20}{31} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left(-\infty, \frac{36}{17}\right] & \& \quad & x \in \left[\frac{20}{31}, +\infty\right).
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\infty, \dfrac{36}{17}\right] \cap \left[\dfrac{20}{31}, +\infty\right) = \left[\dfrac{20}{31}, \dfrac{36}{17}\right]$.



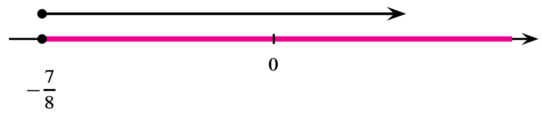
□

9. $1 - 5x \le 8 + 3x < 3x + 9$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$
\begin{aligned}
& 1 - 5x \le 8 + 3x & \& \quad & 8 + 3x < 3x + 9 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & -5x - 3x \le 8 - 1 & \& \quad & 3x - 3x < 9 - 8 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & -8x \le 7 & \& \quad & 0 < 1 \text{ (siempre se cumple)} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x \ge -\frac{7}{8} & \& \quad & x \in \mathbb{R} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x \in \left[-\frac{7}{8}, +\infty\right) & \& \quad & x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es: $CS = \left[-\dfrac{7}{8}, +\infty\right) \cap \mathbb{R} = \left[-\dfrac{7}{8}, +\infty\right)$.



□

10. $-3x + 4 > 6 - 3x \geq 9x + 5$.

▼ Esta doble desigualdad se cumple cuando

$$\begin{array}{rrcll}
 & -3x + 4 > 6 - 3x & \& & 6 - 3x \geq 9x + 5 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & -3x + 3x > 6 - 4 & \& & -3x - 9x \geq 5 - 6 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 0 > 2 & \& & -12x \geq -1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \text{(nunca se cumple)} & \& & x \leq \dfrac{-1}{-12} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \emptyset & \& & x \leq \dfrac{1}{12}\,. &
\end{array}$$

Debido a que ambas desigualdades no se pueden cumplir a la vez, podemos afirmar que el conjunto solución es el conjunto vacío $\emptyset$. Esto es:

$$CS = \emptyset \cap \left(-\infty, \frac{1}{12}\right] = \emptyset\,.$$

□

11. $3x - 4 < 9x + 2 < x - 10$.

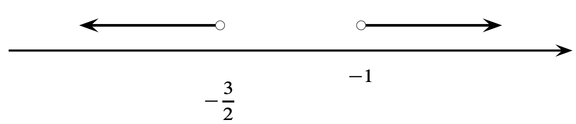
▼ La primera desigualdad $3x - 4 < 9x + 2$ equivale a

$$-4 - 2 < 9x - 3x \;\Leftrightarrow\; -6 < 6x \;\Leftrightarrow\; \frac{-6}{6} < x \;\Leftrightarrow\; -1 < x \;\Leftrightarrow\; x \in (-1, +\infty)\,.$$

Y la segunda desigualdad $9x + 2 < x - 10$ se cumple si

$$8x < -12 \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)\,.$$

Por lo que el conjunto solución es: $CS = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cap (-1, +\infty) = \emptyset\,.$



□

1.7.5 Desigualdades del tipo $|\, ax+b\,| \ge M$ con $M > 0$

Ejercicios 1.7.5 *Resolver las siguientes desigualdades:*

1. $|\, x-13\,| \le 5$.

▼
$$|\, x-13\,| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le x-13 \le 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -5+13 \le (x-13)+13 \le 5+13 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8 \le x \le 18 \Leftrightarrow x \in [8, 18]\,.$$

El conjunto solución es: $CS = [8, 18]\,.$ □

2. $|\, 2x+5\,| < 3$.

▼
$$|\, 2x+5\,| < 3 \Leftrightarrow -3 < 2x+5 < 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -3-5 < (2x+5)-5 < 3-5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8 < 2x < -2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-8}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{-2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4 < x < -1 \Leftrightarrow x \in (-4, -1)\,.$$

El conjunto solución es: $CS = (-4, -1)\,.$ □

3. $|\, x+4\,| \ge 6$.

▼
$$|\, x+4\,| \ge 6 \Leftrightarrow x+4 \le -6 \text{ o bien } x+4 \ge 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \le -6-4 \text{ o bien } x \ge 6-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \le -10 \text{ o bien } x \ge 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -10] \text{ o bien } x \in [2, +\infty)\,.$$

El conjunto solución es: $CS = (-\infty, -10] \cup [2, +\infty) = \mathbb{R} - (-10, 2)\,.$ □

4. $|\, 3x-1\,| > 4$.

▼
$$|\, 3x-1\,| > 4 \Leftrightarrow 3x-1 < -4 \text{ o bien } 3x-1 > 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x < -4+1 \text{ o bien } 3x > 4+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-3}{3} \text{ o bien } x > \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \text{ o bien } x \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)\,.$$

El conjunto solución es: $CS = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{3}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-1, \frac{5}{3}\right]\,.$ □

5. $\left|\dfrac{2x+3}{4}\right| \le 3$.

▼ $$\begin{aligned}\left|\frac{2x+3}{4}\right| \le 3 \;&\Leftrightarrow\; -3 \le \frac{2x+3}{4} \le 3 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; -12 \le 2x+3 \le 12 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; -12-3 \le 2x \le 12-3 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; \frac{-15}{2} \le x \le \frac{9}{2} \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x \in \left[-\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right].\end{aligned}$$

El conjunto solución es: $CS = \left[-\dfrac{15}{2}, \dfrac{9}{2}\right]$. □

6. $\left|\dfrac{3}{2}x - \dfrac{4}{3}\right| > 1$.

▼ $$\begin{aligned}\left|\frac{3}{2}x - \frac{4}{3}\right| > 1 \;&\Leftrightarrow\; \frac{3}{2}x - \frac{4}{3} < -1 \text{ o bien } \frac{3}{2}x - \frac{4}{3} > 1 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; \frac{3}{2}x < -1 + \frac{4}{3} \text{ o bien } \frac{3}{2}x > 1 + \frac{4}{3} \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x < \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ o bien } x > \frac{2}{3}\left(\frac{7}{3}\right) \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x < \frac{2}{9} \text{ o bien } x > \frac{14}{9} \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x \in \left(-\infty, \frac{2}{9}\right) \text{ o bien } x \in \left(\frac{14}{9}, +\infty\right).\end{aligned}$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\infty, \dfrac{2}{9}\right) \cup \left(\dfrac{14}{9}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[\dfrac{2}{9}, \dfrac{14}{9}\right]$. □

7. $|\,2-5x\,| \ge \dfrac{5}{2}$.

▼ $$\begin{aligned}|\,2-5x\,| \ge \frac{5}{2} \;&\Leftrightarrow\; 2-5x \le -\frac{5}{2} \text{ o bien } 2-5x \ge \frac{5}{2} \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; -5x \le -\frac{5}{2} - 2 \text{ o bien } -5x \ge \frac{5}{2} - 2 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; -\frac{1}{5}(-5x) \ge \left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{9}{2}\right) \text{ o bien } \left(-\frac{1}{5}\right)(-5x) \le \left(-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x \ge \frac{9}{10} \text{ o bien } x \le -\frac{1}{10} \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x \in \left[\frac{9}{10}, +\infty\right) \text{ o bien } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{10}\right].\end{aligned}$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\infty, -\dfrac{1}{10}\right] \cup \left[\dfrac{9}{10}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{9}{10}\right)$. □

8. $\left|4-\dfrac{2}{3}x\right|<\dfrac{6}{5}$.

▼
$$
\begin{aligned}
\left|4-\frac{2}{3}x\right|<\frac{6}{5} \;&\Leftrightarrow\; -\frac{6}{5}<4-\frac{2}{3}x<\frac{6}{5} \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; -\frac{6}{5}-4<-\frac{2}{3}x<\frac{6}{5}-4 \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; -\frac{26}{5}<-\frac{2}{3}x<-\frac{14}{5} \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{26}{5}\right)>\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}x\right)>\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{14}{5}\right) \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; \frac{39}{5}>x>\frac{21}{5} \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x\in\left(\frac{21}{5},\frac{39}{5}\right).
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es: $CS=\left(\dfrac{21}{5},\dfrac{39}{5}\right)$. □

9. $\left|\dfrac{5}{2}-\dfrac{3x}{4}\right|>0$.

▼ Siendo $r\in\mathbb{R}$, se sabe que $|\,r\,|\geq 0$ y además que $|\,r\,|=0 \;\Leftrightarrow\; r=0$.
Esto implica que $|\,r\,|>0 \;\Leftrightarrow\; r\neq 0$.
Luego:

$$\left|\frac{5}{2}-\frac{3x}{4}\right|>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{2}-\frac{3x}{4}\neq 0\,.$$

Pero

$$\frac{5}{2}-\frac{3x}{4}=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3x}{4}=\frac{5}{2} \;\Leftrightarrow\; x=\frac{5(4)}{2(3)}=\frac{10}{3}\,.$$

Por lo tanto:

$$\left|\frac{5}{2}-\frac{3x}{4}\right|>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{2}-\frac{3x}{4}\neq 0 \;\Leftrightarrow\; x\neq\frac{10}{3}\,.$$

El conjunto solución es: $CS=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{10}{3}\right\}$. □

10. $\left|\dfrac{2}{5}+\dfrac{4x}{3}\right|\leq 0$.

▼ Ya que $|\,r\,|\geq 0$ para cada $r\in\mathbb{R}$, entonces $|\,r\,|<0$ no puede ocurrir.
Luego, $|\,r\,|\leq 0 \;\Leftrightarrow\; |\,r\,|=0 \;\Leftrightarrow\; r=0$.
Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{2}{5}+\frac{4x}{3}\right|\leq 0 \;\Leftrightarrow\; \left|\frac{2}{5}+\frac{4x}{3}\right|=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{5}+\frac{4x}{3}=0 \;\Leftrightarrow\\
\Leftrightarrow\; \frac{4x}{3}=-\frac{2}{5} \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{2(3)}{5(4)}=-\frac{3}{10}\,.
\end{aligned}
$$

El conjunto solución es: $CS=\left\{-\dfrac{3}{10}\right\}$. □

11. $\left| \dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3} \right| \leq -1.$

▼ Ya que $|\, r \,| \geq 0$ para cada $r \in \mathbb{R}$, entonces $|\, r \,| \leq -1$ no puede ocurrir.

El conjunto solución de $\left| \dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3} \right| \leq -1$ es el conjunto vacío $\varnothing$. □

12. $\left| \dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3} \right| \geq 0.$

▼ Ya que $|\, r \,| \geq 0$ para cada $r \in \mathbb{R}$, entonces $\left| \dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3} \right| \geq 0$ siempre ocurre.

El conjunto solución de $\left| \dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3} \right| \geq 0$ es $\mathbb{R}$. □

13. $\left| \dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3} \right| \geq -1.$

▼ Ya que $|\, r \,| \geq 0 > -1$ para cada $r \in \mathbb{R}$, entonces el conjunto solución es $\mathbb{R}$. □

14. $\left| \dfrac{2}{5} + \dfrac{4x}{3} \right| < 0.$

▼ Ya que $|\, r \,| \geq 0$ para cada $r \in \mathbb{R}$, entonces $|\, r \,| < 0$ no puede ocurrir.

El conjunto solución es el conjunto vacío, $\varnothing$. □

1.7.7 Desigualdades del tipo $\dfrac{ax+b}{cx+d} \geq k$

Ejercicios 1.7.7 *Resolver las siguientes desigualdades:*

1. $\dfrac{5+3x}{4x+5} > 1.$

▼ $\dfrac{5+3x}{4x+5} - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{5+3x-1(4x+5)}{4x+5} > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{5+3x-4x-5}{4x+5} > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{-x}{4x+5} > 0\,.$

Esta desigualdad se cumple cuando

$$\begin{array}{llllllll}
 & -x > 0 & \& & 4x+5>0 & \text{o bien} & -x<0 & \& \; 4x+5<0 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x<0 & \& & 4x>-5 & \text{o bien} & x>0 & \& \; 4x<-5 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x<0 & \& & x>\dfrac{-5}{4} & \text{o bien} & x>0 & \& \; x<\dfrac{-5}{4} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \left(-\dfrac{5}{4}, 0\right) & & & \text{o bien} & x \in \varnothing\,. & &
\end{array}$$

El conjunto solución es: $CS = \left(-\dfrac{5}{4}, 0\right) \cup \varnothing = \left(-\dfrac{5}{4}, 0\right)$.



□

2. $\dfrac{2}{3-5x} \le -\dfrac{3}{5}$.

▼ Pensemos primero que

$$3-5x>0 \iff 3>5x \iff x<\frac{3}{5}\,.$$

En este caso la desigualdad propuesta equivale a

$$2 \le -\frac{3}{5}(3-5x) \iff 2 \le -\frac{9}{5}+3x \iff 2+\frac{9}{5} \le 3x \iff \frac{10+9}{5} \le 3x \iff$$
$$\iff x \ge \frac{19}{5\times 3} \iff x \ge \frac{19}{15}\,.$$

Pero no existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x<\frac{3}{5}\ \&\ \ge \frac{19}{15}\,.$$

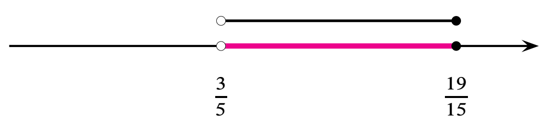
Ahora bien, si consideramos el caso

$$3-5x<0 \iff 3<5x \iff x>\frac{3}{5}\,,$$

la desigualdad a resolver es:

$$2 \ge -\frac{3}{5}(3-5x) \iff 2 \ge -\frac{9}{5}+3x \iff 2+\frac{9}{5} \ge 3x \iff \frac{10+9}{5} \ge 3x \iff x \le \frac{19}{15}\,.$$

Luego, el conjunto solución es: $CS = \left(-\infty, \dfrac{19}{15}\right] \cap \left(\dfrac{3}{5}, +\infty\right) = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{19}{15}\right]$.



□

3. $\dfrac{6x-5}{x-2} < 7$.

▼ Si $x-2>0$, es decir, si $x>2$, la desigualdad dada equivale a

$$6x-5<7(x-2) \iff 6x-5<7x-14 \iff$$
$$\iff -5+14<7x-6x \iff 9<x \iff x\in(9,+\infty),$$

puesto que, si $x>9$, entonces $x>2$, y una parte del conjunto solución es:

$$(2,+\infty)\cap(9,+\infty)=(9,+\infty)\,.$$

Si $x-2<0 \iff x<2$, la desigualdad dada equivale a

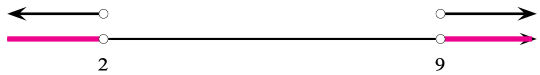
$$6x-5>7(x-2) \iff 6x-5>7x-14 \iff -5+14>7x-6x \iff$$
$$\iff 9>x \iff x\in(-\infty,9);$$

y la otra parte del conjunto solución será:

$$(-\infty,2)\cap(-\infty,9)=(-\infty,2)\ .$$

Por lo tanto el conjunto solución será:

$$CS=(-\infty,2)\cup(9,+\infty)=\mathbb{R}-[2,9].$$



□

4. $\dfrac{-2}{x-4} < 7$.

▼ La desigualdad $\dfrac{-2}{x-4} < 7$ es la misma que $\dfrac{2}{-(x-4)} < 7 \Rightarrow \dfrac{2}{4-x} < 7$.

Ya que $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 4)$, la desigualdad dada es equivalente a

$$2 < 7(4-x) \Leftrightarrow 2 < 28 - 7x \Leftrightarrow 7x < 28 - 2 \Leftrightarrow 7x < 26 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{26}{7} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{26}{7}\right).$$

Como $\left(-\infty, \dfrac{26}{7}\right) \subset (-\infty, 4)$, entonces parte del conjunto solución es: $\left(-\infty, \dfrac{26}{7}\right)$ en este caso.

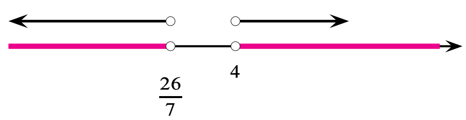
Ahora, $4 - x < 0 \Leftrightarrow x \in (4, +\infty)$. La desigualdad dada es equivalente a

$$2 > 7(4-x) \Leftrightarrow 2 > 28 - 7x \Leftrightarrow 7x > 28 - 2 \Leftrightarrow 7x > 26 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{26}{7} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{26}{7}, +\infty\right).$$

Como $(4, +\infty) \subset \left(\dfrac{26}{7}, +\infty\right)$, entonces $x \in (4, +\infty) \cap \left(\dfrac{26}{7}, +\infty\right) = (4, +\infty)$ y $(4, +\infty)$ es parte del conjunto solución también.

Por lo que el conjunto solución de la desigualdad $\dfrac{-2}{x-4} < 7$ es :

$$CS = \left(-\infty, \frac{26}{7}\right) \cup (4, +\infty) = \mathbb{R} - \left[\frac{26}{7}, 4\right].$$



□

5. $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{1}{4}$.

▼ La desigualdad es equivalente a

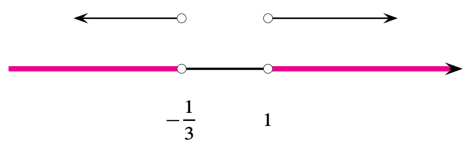
$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \frac{4x - x + 1}{4(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{4(x-1)} > 0.$$

Ésta se cumple si

$$\begin{array}{lllllll}
 & 3x+1>0 & \& & 4(x-1)>0 & \text{o bien} & 3x+1<0 & \& & 4(x-1)<0 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 3x>-1 & \& & x-1>0 & \text{o bien} & 3x<-1 & \& & x-1<0 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x>-\frac{1}{3} & \& & x>1 & \text{o bien} & x<-\frac{1}{3} & \& & x<1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & & x>1 & & & \text{o bien} & & x<-\frac{1}{3}. &
\end{array}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$CS = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{3}, 1\right].$$



□

6. $\dfrac{2x+3}{x+8} < 5$.

▼ La desigualdad es equivalente a:

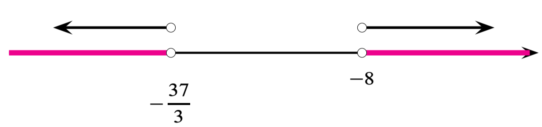
$$\frac{2x+3}{x+8} - 5 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-5x-40}{x+8} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-37}{x+8} < 0\,.$$

Lo cual se cumple si

$$\begin{array}{llllllll}
 & -3x-37>0 & \& & x+8<0 & \text{o bien} & -3x-37<0 & \& & x+8>0 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 3x<-37 & \& & x<-8 & \text{o bien} & 3x>-37 & \& & x>-8 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x<-\dfrac{37}{3} & \& & x<-8 & \text{o bien} & x>-\dfrac{37}{3} & \& & x>-8 \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x<-\dfrac{37}{3} & & & \text{o bien} & & x>-8 & \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \left(-\infty, -\dfrac{37}{3}\right) & & & \text{o bien} & & x \in (-8, +\infty)\,. &
\end{array}$$

Luego, el conjunto solución de la desigualdad propuesta es:

$$CS = \left(-\infty, -\frac{37}{3}\right) \cup (-8, +\infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{37}{3}, -8\right].$$



□

7. $\dfrac{3-x}{4x+1} \geq 4$.

▼ Esta desigualdad equivale a

$$\frac{3-x}{4x+1} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-x-16x-4}{4x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-17x-1}{4x+1} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{17x+1}{4x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{17x+1}{4x+1} \leq 0;$$

esta última se cumple si

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & 17x+1\ge 0 & \& & 4x+1<0 & \text{o bien} & 17x+1\le 0 & \& & 4x+1>0 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 17x\ge -1 & \& & 4x<-1 & \text{o bien} & 17x\le -1 & \& & 4x>-1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x\ge -\dfrac{1}{17} & \& & x<-\dfrac{1}{4} & \text{o bien} & x\le -\dfrac{1}{17} & \& & x>-\dfrac{1}{4} & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & & x\in\varnothing & & \text{o bien} & x\in\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{17}\right]. & & &
\end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es precisamente:

$$CS=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{17}\right].$$



□

8. $\dfrac{2x-9}{x-1}\ge 8.$

▼ Esta desigualdad es equivalente a

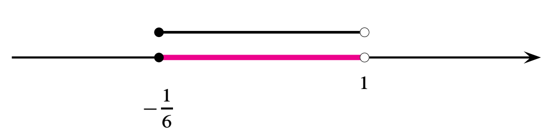
$$\frac{2x-9}{x-1}-8\ge 0\ \Leftrightarrow\ \frac{2x-9-8x+8}{x-1}=\frac{-6x-1}{x-1}=-\frac{6x+1}{x-1}\ge 0\ \Leftrightarrow\ \frac{6x+1}{x-1}\le 0\,.$$

Y esta última se cumple si

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & 6x+1\ge 0 & \& & x-1<0 & \text{o bien} & 6x+1\le 0 & \& & x-1>0 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 6x\ge -1 & \& & x<1 & \text{o bien} & 6x\le -1 & \& & x>1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x\ge -\dfrac{1}{6} & \& & x<1 & \text{o bien} & x\le -\dfrac{1}{6} & \& & x>1 & \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & & x\in\left[-\dfrac{1}{6},1\right) & & \text{o bien} & & x\in\varnothing\,. & &
\end{array}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$CS=\left[-\frac{1}{6},1\right).$$



□

9. $\dfrac{2+3x}{3-4x}\le 2.$

▼ Transponiendo términos la desigualdad propuesta equivale a:

$$\frac{2+3x}{3-4x}-2\le 0$$

y obtenemos así

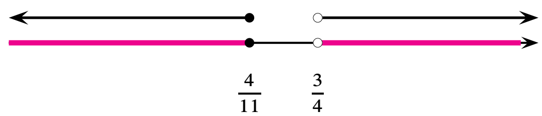
$$\frac{2+3x-6+8x}{3-4x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{11x-4}{3-4x} \le 0.$$

Lo cual ocurre si

$$\begin{array}{lcccccccl}
 & 11x-4 \ge 0 & \& & 3-4x<0 & \text{o bien} & 11x-4 \le 0 & \& & 3-4x>0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 11x \ge 4 & \& & -4x<-3 & \text{o bien} & 11x \le 4 & \& & -4x>-3 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \ge \dfrac{4}{11} & \& & x>\dfrac{3}{4} & \text{o bien} & x \le \dfrac{4}{11} & \& & x<\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & & x \in \left(\dfrac{3}{4},+\infty\right) & & \text{o bien} & & x \in \left(-\infty,\dfrac{4}{11}\right]. & &
\end{array}$$

Luego, el conjunto solución es:

$$CS = \left(-\infty,\frac{4}{11}\right] \cup \left(\frac{3}{4},+\infty\right) = \mathbb{R} - \left(\frac{4}{11},\frac{3}{4}\right].$$



□

10. $\dfrac{2}{x} - 5 < \dfrac{3}{x} + 2.$

▼ Transponiendo términos

$$\frac{2}{x} - 5 - \frac{3}{x} - 2 < 0.$$

Efectuando las operaciones indicadas

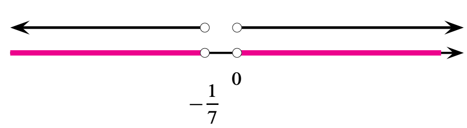
$$\frac{2-5x-3-2x}{x} < 0 \Leftrightarrow -\frac{7x+1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{7x+1}{x} > 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{llcllcl}
 & 7x+1>0 & \& & x>0 & \text{o bien} & 7x+1<0 \quad \& \quad x<0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & 7x>-1 & \& & x>0 & \text{o bien} & 7x<-1 \quad \& \quad x<0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x>-\dfrac{1}{7} & \& & x>0 & \text{o bien} & x<-\dfrac{1}{7} \quad \& \quad x<0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \left(-\dfrac{1}{7},+\infty\right) & \& & x \in (0,+\infty) & \text{o bien} & x \in \left(-\infty,-\dfrac{1}{7}\right) \quad \& \quad x \in (-\infty,0) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x \in \left(-\dfrac{1}{7},+\infty\right) \cap (0,+\infty) = (0,+\infty) & & & & \text{o bien} \quad x \in \left(-\infty,-\dfrac{1}{7}\right) \cap (-\infty,0) = \left(-\infty,-\dfrac{1}{7}\right).
\end{array}$$

Por lo que el conjunto solución es:

$$CS = \left(-\infty,-\frac{1}{7}\right) \cup (0,+\infty) = \mathbb{R} - \left[-\frac{1}{7},0\right].$$



□

1.7.8 Desigualdades del tipo $ax^2 + bx + c \geq 0$ con $a \neq 0$

Ejercicios 1.7.8 *Resolver las siguientes desigualdades:*

1. $x^2 - 5x + 4 > 0$.

▼ Factorizando:

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1).$$

Entonces:

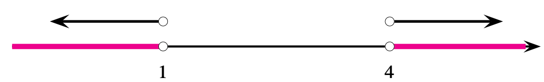
$$x^2 - 5x + 4 > 0 \;\Leftrightarrow\; (x - 4)(x - 1) > 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{ccccccc} x - 4 > 0 & \& & x - 1 > 0 & \text{o bien} & x - 4 < 0 & \& & x - 1 < 0 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; x > 4 & \& & x > 1 & \text{o bien} & x < 4 & \& & x < 1 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x \in (4, +\infty) & & \text{o bien} & & x \in (-\infty, 1)\,. & \end{array}$$

El conjunto solución es:

$$CS = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty) = \mathbb{R} - [1, 4]\,.$$



□

2. $x^2 - 4x - 12 < 0$.

▼ Como

$$x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x + 2),$$

entonces:

$$x^2 - 4x - 12 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x - 6)(x + 2) < 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{ccccccc} x - 6 < 0 & \& & x + 2 > 0 & \text{o bien} & x - 6 > 0 & \& & x + 2 < 0 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; x < 6 & \& & x > -2 & \text{o bien} & x > 6 & \& & x < -2 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x \in (-2, 6) & & \text{o bien} & & x \in \varnothing\,. & \end{array}$$

El conjunto solución es:

$$CS = (-2, 6) \cup \varnothing = (-2, 6)\,.$$



□

3. $9x^2 - 4 \geq 0$.

▼ Como

$$9x^2 - 4 = (3x + 2)(3x - 2),$$

entonces:

$$9x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (3x - 2)(3x + 2) \geq 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$3x - 2 \geq 0 \quad \& \quad 3x + 2 \geq 0 \quad \text{o bien} \quad 3x - 2 \leq 0 \quad \& \quad 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

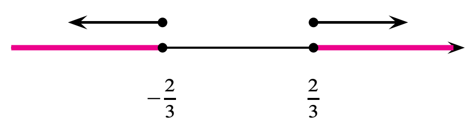
$$\Leftrightarrow 3x \geq 2 \quad \& \quad 3x \geq -2 \quad \text{o bien} \quad 3x \leq 2 \quad \& \quad 3x \leq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \quad \& \quad x \geq \frac{-2}{3} \quad \text{o bien} \quad x \leq \frac{2}{3} \quad \& \quad x \leq \frac{-2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right) \quad \text{o bien} \quad x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right].$$

El conjunto solución es:

$$CS = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$



□

4. $1 - x^2 \leq 0$.

▼ Multiplicando por -1 ambos miembros obtenemos una desigualdad equivalente a la propuesta:

$$1 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \geq 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

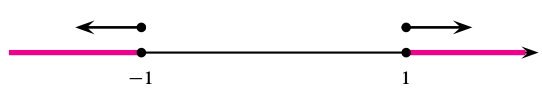
$$\Leftrightarrow x + 1 \geq 0 \quad \& \quad x - 1 \geq 0 \quad \text{o bien} \quad x + 1 \leq 0 \quad \& \quad x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \quad \& \quad x \geq 1 \quad \text{o bien} \quad x \leq -1 \quad \& \quad x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [1, +\infty) \quad \text{o bien} \quad x \in (-\infty, -1].$$

El conjunto solución es:

$$CS = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1).$$



□

5. $2x^2 + 5x + 2 > 0$.

▼ Multiplicando por $\dfrac{1}{2}$ ambos miembros de la desigualdad:

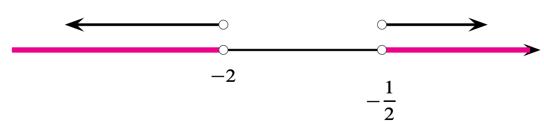
$$2x^2 + 5x + 2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + \frac{5}{2}x + 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; (x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{lllllll}
\Leftrightarrow x + 2 > 0 & \& & x + \frac{1}{2} > 0 & \text{o bien} & x + 2 < 0 & \& & x + \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x > -2 & \& & x > -\frac{1}{2} & \text{o bien} & x < -2 & \& & x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) & & & \text{o bien} & & & x \in (-\infty, -2)\,.
\end{array}$$

El conjunto solución es:

$$CS = (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left[-2, -\frac{1}{2}\right].$$



□

6. $2x^2 + 5x - 3 < 0$.

▼ Multiplicando por $\dfrac{1}{2}$ ambos miembros de la desigualdad:

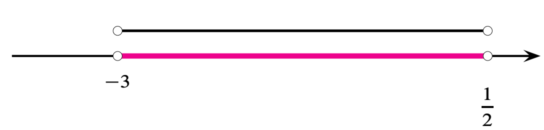
$$2x^2 + 5x - 3 < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 0 \;\Leftrightarrow\; (x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{lllllll}
x + 3 > 0 & \& & x - \frac{1}{2} < 0 & \text{o bien} & x + 3 < 0 & \& & x - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x > -3 & \& & x < \frac{1}{2} & \text{o bien} & x < -3 & \& & x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x \in \left(-3, \frac{1}{2}\right) & & & \text{o bien} & & & x \in \varnothing\,.
\end{array}$$

El conjunto solución es:

$$CS = \left(-3, \frac{1}{2}\right) \cup \varnothing = \left(-3, \frac{1}{2}\right).$$



□

7. $3x^2 - x - 2 \ge 0$.

▼ Multiplicando por $\frac{1}{3}$ ambos miembros de la desigualdad:

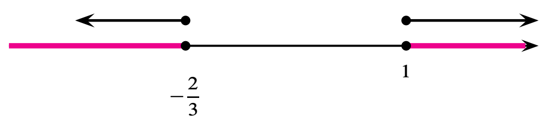
$$3x^2 - x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \ge 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1) \ge 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{lllllll} x + \frac{2}{3} \ge 0 & \& & x - 1 \ge 0 & \text{o bien} & x + \frac{2}{3} \le 0 & \& & x - 1 \le 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \ge -\frac{2}{3} & \& & x \ge 1 & \text{o bien} & x \le -\frac{2}{3} & \& & x \le 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in [1, +\infty) & & & \text{o bien} & x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]. & & \end{array}$$

El conjunto solución es:

$$CS = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - \left(-\frac{2}{3}, 1\right).$$



□

8. $3x^2 + 7x - 6 \le 0$.

▼ Multiplicando por $\frac{1}{3}$ ambos miembros de la desigualdad:

$$3x^2 + 7x - 6 \le 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{7}{3}x - 2 \le 0 \Leftrightarrow (x + 3)\left(x - \frac{2}{3}\right) \le 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{lllllll} x + 3 \ge 0 & \& & x - \frac{2}{3} \le 0 & \text{o bien} & x + 3 \le 0 & \& & x - \frac{2}{3} \ge 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \ge -3 & \& & x \le \frac{2}{3} & \text{o bien} & x \le -3 & \& & x \ge \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in \left[-3, \frac{2}{3}\right] & & & \text{o bien} & & & x \in \varnothing. \end{array}$$

El conjunto solución es:

$$CS = \left[-3, \frac{2}{3}\right] \cup \varnothing = \left[-3, \frac{2}{3}\right].$$



□

9. $2x^2 + 9x + 5 \le 2 - 2x - 4x^2$.

▼ $2x^2 + 9x + 5 \le 2 - 2x - 4x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x^2 + 9x + 2x + 5 - 2 \le 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 11x + 3 \le 0$.

Multiplicando por $\frac{1}{6}$ ambos miembros de la última desigualdad:

$$6x^2 + 11x + 3 \le 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{3}{6} \le 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{1}{2} \le 0.$$

Obtenemos

$$x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{121}{36} - 2}}{2} \Rightarrow x = -\frac{11}{12} \pm \frac{\sqrt{\frac{121 - 72}{36}}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{11}{12} \pm \frac{\sqrt{\frac{49}{36}}}{2} \Rightarrow x = -\frac{11}{12} \pm \frac{\frac{7}{6}}{2} = -\frac{11}{12} \pm \frac{7}{12} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ o bien } x = -\frac{3}{2}.$$

Y así:

$$x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{1}{2} = \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \le 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$x + \frac{3}{2} \ge 0 \quad \& \quad x + \frac{1}{3} \le 0 \quad \text{o bien} \quad x + \frac{3}{2} \le 0 \quad \& \quad x + \frac{1}{3} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \ge -\frac{3}{2} \quad \& \quad x \le -\frac{1}{3} \quad \text{o bien} \quad x \le -\frac{3}{2} \quad \& \quad x \ge -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right] \quad \text{o bien} \quad x \in \varnothing.$$

El conjunto solución es:

$$CS = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right] \cup \varnothing = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right].$$



□

10. $-3x^2 + 3x - 2 > 4x - 9x^2 - 1$.

▼ $-3x^2 + 3x - 2 > 4x - 9x^2 - 1 \Leftrightarrow -3x^2 + 9x^2 + 3x - 4x - 2 + 1 > 0 \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 > 0$.

Multiplicando por $\frac{1}{6}$ ambos miembros de la última desigualdad:

$$6x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{6}\right)\left(x + \frac{2}{6}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) > 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

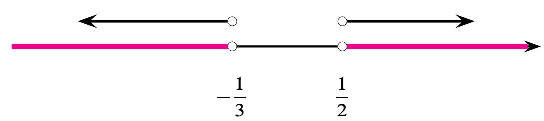
$$x-\frac{1}{2}>0 \quad \& \quad x+\frac{1}{3}>0 \quad \text{o bien} \quad x-\frac{1}{2}<0 \quad \& \quad x+\frac{1}{3}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \quad \& \quad x>-\frac{1}{3} \quad \text{o bien} \quad x<\frac{1}{2} \quad \& \quad x<-\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right) \quad \text{o bien} \quad x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right).$$

El conjunto solución es:

$$CS=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)=\mathbb{R}-\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right].$$



□

11. $4x^2-2x+1\geq 10x^2+3x-5$.

▼ $4x^2-2x+1\geq 10x^2+3x-5 \Leftrightarrow 0\geq 10x^2-4x^2+3x+2x-5-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0\geq 6x^2+5x-6 \Leftrightarrow 6x^2+5x-6\leq 0.$

Multiplicando por $\frac{1}{6}$ ambos miembros de la última desigualdad:

$$6x^2+5x-6\leq 0 \Leftrightarrow x^2+\frac{5}{6}x-1\leq 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\leq 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$x+\frac{3}{2}\geq 0 \quad \& \quad x-\frac{2}{3}\leq 0 \quad \text{o bien} \quad x+\frac{3}{2}\leq 0 \quad \& \quad x-\frac{2}{3}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\geq -\frac{3}{2} \quad \& \quad x\leq \frac{2}{3} \quad \text{o bien} \quad x\leq -\frac{3}{2} \quad \& \quad x\geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in\left[-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right] \quad \text{o bien} \quad x\in\varnothing.$$

El conjunto solución es:

$$CS=\left[-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right]\cup\varnothing=\left[-\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right].$$



□

12. $2x^2 + 3x - 4 < x^2 + x - 6$.

▼ $2x^2 + 3x - 4 < x^2 + x - 6 \Leftrightarrow 2x^2 - x^2 + 3x - x - 4 + 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 < 0$.

Reescribiendo el trinomio cuadrático mediante un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + 2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 < 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 < -1.$$

Nunca se cumple que un número al cuadrado sea negativo. Por lo tanto no existe solución. El conjunto solución es el conjunto vacío:

$$CS = \varnothing\,.$$

De hecho $y = x^2 + 2x + 2$ o bien $y = (x+1)^2 + 1$ es una parábola con vértice en $V(-1, 1)$, que se abre hacia arriba, por lo cual siempre toma valores positivos.

También podemos observar que el discriminante de la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ es negativo , es decir, $b^2 - 4ac = 4 - 4(1)(2) < 0$; luego, no tiene raíces reales. La parábola $y = x^2 + 2x + 2$ nunca corta al eje de las x. Para $x = 0$, por ejemplo, $x^2 + 2x + 2$ vale 2, con lo cual siempre está por encima del eje de las x y nunca es negativa. □

13. $2x^2 - 3x < x^2 \le 2x^2 - 4$.

▼ Tenemos que resolver dos desigualdades

$$2x^2 - 3x < x^2 \quad \& \quad x^2 \le 2x^2 - 4.$$

La primera equivale a

$$x^2 - 3x < 0 \Leftrightarrow x(x-3) < 0.$$

Y esto ocurre si

$$\begin{array}{ccccccc} x < 0 & \& & x - 3 > 0 & \text{o bien} & x > 0 & \& & x - 3 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x < 0 & \& & x > 3 & \text{o bien} & x > 0 & \& & x < 3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x \in \varnothing & & \text{o bien} & & x \in (0,3)\,. & \end{array}$$

Por lo tanto la primera desigualdad se cumple si

$$x \in CS_1 = (0, 3)\ .$$

La segunda, $x^2 \le 2x^2 - 4$, equivale a

$$x^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \ge 0.$$

Y se cumple si

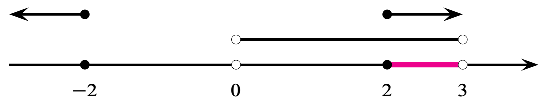
$$\begin{array}{ccccccc} x + 2 \le 0 & \& & x - 2 \le 0 & \text{o bien} & x + 2 \ge 0 & \& & x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \le -2 & \& & x \le 2 & \text{o bien} & x \ge -2 & \& & x \ge 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x \in (-\infty, -2] & & \text{o bien} & & x \in [2, +\infty)\,. & \end{array}$$

Entonces esta desigualdad se cumple si

$$x \in CS_2 = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)\ .$$

Y ambas se cumplen si

$$x \in (CS_1 \cap CS_2) = x \in (0,3) \cap \{\,(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)\,\} = [2, 3)\,.$$



□

14. $2x^2 + 7x - 5 \le 2x - 2$.

▼ La desigualdad equivale a

$$2x^2 + 7x - 5 - 2x + 2 \le 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 5x - 3 \le 0\,.$$

Resolvamos la igualdad

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2}; \\ -3\,. \end{cases}$$

Y entonces $2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 3)$; el signo de este trinomio nos lo da la tabla siguiente:

	Signo de		
Intervalo	$x + 3$	$x - \frac{1}{2}$	$2x^2 + 5x - 3$
$x < -3 \left(< \frac{1}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$
$-3 < x < \frac{1}{2}$	$+$	$-$	$-$
$x > \frac{1}{2} \,(> -3)$	$+$	$+$	$+$

Por lo que el conjunto solución de la desigualdad propuesta es:

$$\left[-3, \frac{1}{2}\right].$$



□

15. $\dfrac{3x^2 - 27}{5 - 3x} \ge 0$.

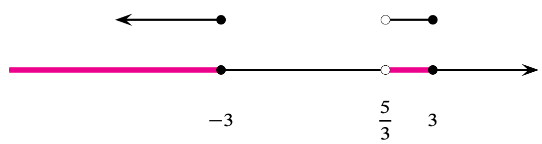
▼ Esta desigualdad equivale a $\dfrac{x^2 - 9}{5 - 3x} \ge 0$, que se obtiene multiplicando la anterior por $\dfrac{1}{3}$. La última

desigualdad ocurre si

$$
\begin{array}{rcccccc}
x^2 - 9 \geq 0 & \& & 5 - 3x > 0 & \text{o bien} & x^2 - 9 \leq 0 & \& & 5 - 3x < 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ x^2 \geq 9 & \& & 3x < 5 & \text{o bien} & x^2 \leq 9 & \& & 3x > 5 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ |\, x \,| \geq 3 & \& & x < \dfrac{5}{3} & \text{o bien} & |\, x \,| \leq 3 & \& & x > \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ x \geq 3 \text{ o bien } x \leq -3 & \& & x < \dfrac{5}{3} & \text{o bien} & -3 \leq x \leq 3 & \& & x > \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ x \in (-\infty, -3] & & & \text{o bien} & & & x \in \left(\dfrac{5}{3}, 3\right].
\end{array}
$$

Luego, el conjunto solución es:

$$
CS = (-\infty, -3] \cup \left(\frac{5}{3}, 3\right].
$$



Comentario: otra manera de resolver la desigualdad es mediante una tabla.

Como

$$
\frac{x^2 - 9}{5 - 3x} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{5 - 3x},
$$

también podemos averiguar cuándo es no negativa, viendo el signo de cada factor

	Signo de			
Intervalo	$x + 3$	$5 - 3x$	$x - 3$	$\dfrac{x^2 - 9}{5 - 3x}$
$x < -3 \left(< \dfrac{5}{3} < 3\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-3 < x < \dfrac{5}{3} \, (< 3)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(-3 <) \, \dfrac{5}{3} < x < 3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\left(-3 < \dfrac{5}{3} <\right) \, 3 < x$	$+$	$-$	$+$	$-$

Luego, $\dfrac{x^2 - 9}{5 - 3x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup \left(\dfrac{5}{3}, 3\right]$.

□

16. $x^2 + 3x - 6 \ge 2$.

▼ Completando un trinomio cuadrado perfecto

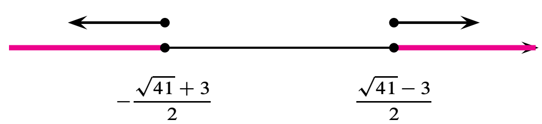
$$x^2 + 3x - 6 \ge 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x \ge 2 + 6 \Leftrightarrow x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \ge 8 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \ge 8 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|\left(x + \frac{3}{2}\right)^2\right| \ge \frac{41}{4} \Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right|^2 \ge \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{3}{2}\right| \ge \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$x + \frac{3}{2} \le -\frac{\sqrt{41}}{2} \quad \text{o bien} \quad x + \frac{3}{2} \ge \frac{\sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \le -\frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{o bien} \quad x \ge \frac{\sqrt{41}}{2} - \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \le -\frac{\sqrt{41} + 3}{2} \quad \text{o bien} \quad x \ge \frac{\sqrt{41} - 3}{2}.$$

El conjunto solución de la desigualdad es:

$$CS = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{41} + 3}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{41} - 3}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left(-\frac{\sqrt{41} + 3}{2}, \frac{\sqrt{41} - 3}{2}\right).$$



Comentario: otra manera de resolver esta desigualdad es la siguiente:

Observamos que

$$x^2 + 3x - 6 \ge 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 8 \ge 0.$$

Además

$$x^2 + 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2} = -\frac{3 \mp \sqrt{41}}{2}.$$

Por lo que

$$x^2 + 3x - 8 = \left(x + \frac{3 + \sqrt{41}}{2}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{41}}{2}\right).$$

Y de aquí se podría resolver directamente la desigualdad propuesta y comprobar el resultado que obtuvimos por el otro procedimiento. □

17. $3x - 3x^2 - 2 \ge 4x - 9x^2 - 1$.

▼ Vemos que

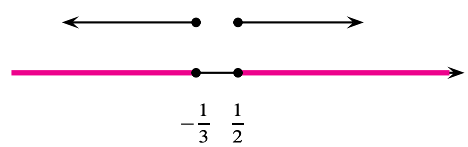
$$3x - 3x^2 - 2 \ge 4x - 9x^2 - 1 \Leftrightarrow 3x - 3x^2 - 2 - 4x + 9x^2 + 1 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow (3x + 1)(2x - 1) \ge 0.$$

Esta última desigualdad se cumple si

$$\begin{array}{rcccccccccl} & 3x+1\le 0 & \& & 2x-1\le 0 & \text{o bien} & 3x+1\ge 0 & \& & 2x-1\ge 0 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 3x\le -1 & \& & 2x\le 1 & \text{o bien} & 3x\ge -1 & \& & 2x\ge 1 & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x\le -\dfrac{1}{3} & \& & x\le \dfrac{1}{2} & \text{o bien} & x\ge -\dfrac{1}{3} & \& & x\ge \dfrac{1}{2} & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & & x\le -\dfrac{1}{3} & & \text{o bien} & & x\ge \dfrac{1}{2} & & & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & & & x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right). & & & & & & \end{array}$$

El conjunto solución es:

$$CS=\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)=\mathbb{R}-\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right).$$



□

1.8 Apéndice del capítulo 1

1.8.1 Conjuntos

Ejercicios 1.8.1 *Expresar por extensión los conjuntos siguientes:*

1. $A=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;2x+3=0\,\right\}$.

   ▼ Ya que $2x+3=0 \;\Leftrightarrow\; 2x=-3 \;\Leftrightarrow\; x=-\dfrac{3}{2}$, entonces $A=\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

   □

2. $B=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;3x^2=4\,\right\}$.

   ▼ Ya que $3x^2=4 \;\Leftrightarrow\; x^2=\dfrac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, entonces $B=\left\{-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right\}$.

   □

3. $C=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x^3-1=0\,\right\}$.

   ▼ $x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{1}=1$, entonces $C=\{1\}$.

   □

4. $D=\left\{\,x\in\mathbb{R}\;\middle|\;x^4-1=0\,\right\}$.

   ▼ $$\begin{aligned} x^4-1=0 &\;\Leftrightarrow\; (x^2+1)(x^2-1)=0 \;\Leftrightarrow\; (x^2+1)(x+1)(x-1)=0 \;\Leftrightarrow\\ &\;\Leftrightarrow\; (x+1)(x-1)=0 \quad (\text{ya que } x^2+1\neq 0) \;\Leftrightarrow\\ &\;\Leftrightarrow\; x+1=0 \text{ o bien } x-1=0 \;\Leftrightarrow\\ &\;\Leftrightarrow\; x=-1 \text{ o bien } x=1 \;\Rightarrow\\ &\;\Rightarrow\; D=\{-1,1\}\,. \end{aligned}$$

   □

5. $E = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 4x \,\}$.

▼ $$\begin{aligned} x^3 = 4x \;&\Leftrightarrow\; x^3 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2 - 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2 - 2^2) = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x(x+2)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ o bien } x + 2 = 0 \text{ o bien } x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ o bien } x = -2 \text{ o bien } x = 2 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; E = \{\, 0, -2, 2 \,\}\,. \end{aligned}$$

□

6. $F = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 15 = 0 \,\}$.

▼ $$\begin{aligned} x^2 + 2x - 15 = 0 \;&\Leftrightarrow\; (x+5)(x-3) = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x + 5 = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x = -5 \text{ o bien } x = 3 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; F = \{\, -5, 3 \,\}\,. \end{aligned}$$

□

7. $G = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \,\}$.

▼ $$\begin{aligned} x^3 - 7x^2 + 10x = 0 \;&\Leftrightarrow\; x(x^2 - 7x + 10) = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x(x-2)(x-5) = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ o bien } x - 2 = 0 \text{ o bien } x - 5 = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ o bien } x = 2 \text{ o bien } x = 5 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; G = \{\, 0, 2, 5 \,\}\,. \end{aligned}$$

□

8. $H = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x = x \,\}$.

▼ Ya que cada número x es igual a sí mismo, entonces $x = x$ se cumple para todo número x. Por lo tanto $H = \mathbb{R}$.

□

9. $I = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq x \,\}$.

▼ Ya que cada número x es igual a sí mismo, entonces x no puede ser diferente de sí mismo. Es decir, no hay x tales que $x \neq x$. Por lo tanto el conjunto I no tiene elementos. Esto es

$$I = \varnothing \text{ (el conjunto vacío).}$$

□

10. $J = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0 \,\}$.

▼ Ya que x^2 nunca es negativo, el menor valor que puede tener x^2 es cero (precisamente para $x = 0$). Entonces el menor valor que puede tener $x^2 + 1$ es precisamente 1, por lo cual nunca puede suceder que $x^2 + 1 = 0$. Es decir, J no tiene elementos:

$$J = \varnothing \text{ (el conjunto vacío).}$$

□

11. Considerando el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, indicar si es falsa (F) o verdadera (V) cada una de las siguientes afirmaciones. Argumentar cada respuesta.

a. $2 \in A$.
b. $\{1, 2\} \subset A$.
c. $\{3, 1, 2\} = A$.
d. $\{1, 2, 3, 2, 3\} \not\subset A$.
e. $\{2\} \subset A$.
f. $\varnothing \subset A$.

▼ a. $2 \in A$: V, ya que el número 2 es, en efecto, un elemento del conjunto A.

b. $\{1, 2\} \subset A$: V, ya que $\{1, 2\}$ es un conjunto cuyos elementos (1 y 2) son también elementos del conjunto A.

c. $\{3, 1, 2\} = A$: V, ya que los elementos de un conjunto se pueden escribir en el orden que se quiera. Entonces $\{3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\} = A$.

d. $\{1, 2, 3, 2, 3\} \not\subset A$: F, ya que $\{1, 2, 3, 2, 3\} = A$, por lo cual $\{1, 2, 3, 2, 3\} \subset A$ y viceversa.

e. $\{2\} \subset A$: V, ya que $\{2\}$ tiene por elemento al número 2 que también es elemento de $A = \{1, 2, 3\}$.

f. $\varnothing \subset A$: V, ya que el conjunto vacío $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto, en particular del conjunto A.

□

12. Considerando los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, obtener los conjuntos siguientes:

a. $A \cup B$.
b. $A \cup C$.
c. $A \cap B$.
d. $A \cap C$.
e. $B - A$.
f. $C - A$.
g. $B \cup C$.
h. $D - C$.
i. $D - B$.
j. $B \cap C$.
k. $D \cup A$.
l. $D \cap A$.
m. $B \cup D$.
n. $C \cap D$.
o. $(A \cup C) - (A \cap C)$.

▼

a. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 0, 2, 4, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

b. $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

c. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{2, 4\}$.

d. $A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 3, 5\}$.

e. $B - A = \{0, 2, 4, 6, 8\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 6, 8\}$.

f. $C - A = \{1, 3, 5, 7, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{7, 9\}$.

g. $B \cup C = \{0, 2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9\} =$.
$= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = D$.

h. $D - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{0, 2, 4, 6, 8\} = B$.

i. $D - B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = C$.

j. $B \cap C = \{0, 2, 4, 6, 8\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \emptyset$.

k. $D \cup A = D$ ya que $A \subset D$.

l. $D \cap A = A$ ya que $A \subset D$.

m. $B \cup D = D$ ya que $B \subset D$.

n. $C \cap D = C$ ya que $C \subset D$.

o. $(A \cup C) - (A \cap C)$.

Por el inciso (b) se tiene que $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

Por el inciso (d) se tiene que $A \cap C = \{1, 3, 5\}$.

Entonces,

$$(A \cup C) - (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} - \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 7, 9\}.$$

□

CAPÍTULO

2

Funciones

2.2 Función real de una variable real

Ejercicios 2.2.1 *Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = \sqrt{5+x}$.

▼ $$D_f = \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{5+x} \in \mathbb{R} \,\right\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 5 + x \geq 0 \,\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5 \,\} = [-5, +\infty) \;\Rightarrow\; D_f = [-5, +\infty)\ .$$

□

2. $g(x) = \dfrac{x}{4x^2 - 9}$.

▼ $$D_g = \{\, x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{x}{4x^2-9} \in \mathbb{R} \,\right\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 9 \neq 0 \,\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{\, x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 9 = 0 \,\} = \mathbb{R} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 = \frac{9}{4} \,\right\} = \mathbb{R} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid |\, x \,| = \frac{3}{2} \,\right\} =$$
$$= \mathbb{R} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{3}{2} \,\right\} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\} = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\ .$$

□

3. $h(t) = \sqrt{8-3t}$.

▼ $$D_h = \{\, t \in \mathbb{R} \mid h(t) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \mid \sqrt{8-3t} \in \mathbb{R} \,\right\} = \{\, t \in \mathbb{R} \mid 8-3t \geq 0 \,\} =$$
$$= \{\, t \in \mathbb{R} \mid -3t \geq -8 \,\} = \left\{\, t \in \mathbb{R} \mid t \leq \frac{8}{3} \,\right\} = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_h = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right].$$

□

4. $j(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x-8}$.

▼ $$D_j = \{\, x \in \mathbb{R} \mid j(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2+x+1}{x^2-2x-8} \in \mathbb{R} \,\right\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2-2x-8 \neq 0 \,\} = \mathbb{R} - \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2-2x-8 = 0 \,\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x-4)(x+2) = 0 \,\} = \mathbb{R} - \{\, x \in \mathbb{R} \mid x-4 = 0 \text{ o bien } x+2 = 0 \,\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{\, x \in \mathbb{R} \mid x = 4 \text{ o bien } x = -2 \,\} = \mathbb{R} - \{-2, 4\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_j = \mathbb{R} - \{-2, 4\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 4) \cup (4, +\infty).$$

□

5. $\alpha(y) = \dfrac{2y+5}{y^2+1}$.

▼ $$D_\alpha = \{\, y \in \mathbb{R} \mid \alpha(y) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, y \in \mathbb{R} \mid \frac{2y+5}{y^2+1} \in \mathbb{R} \,\right\} =$$
$$= \{\, y \in \mathbb{R} \mid y^2+1 \neq 0 \,\} = \mathbb{R} - \{\, y \in \mathbb{R} \mid y^2+1 = 0 \,\} = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_\alpha = \mathbb{R}.$$

□

6. $\beta(x) = \dfrac{\sqrt{10-3x}}{x^2+x-6}$.

▼ $$D_\beta = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \beta(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{\sqrt{10-3x}}{x^2+x-6} \in \mathbb{R} \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{10-3x} \in \mathbb{R} \ \&\ x^2+x-6 \neq 0 \,\right\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \mid 10-3x \geq 0 \ \&\ (x+3)(x-2) \neq 0 \,\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \mid 3x \leq 10 \ \&\ x+3 \neq 0 \ \&\ x-2 \neq 0 \,\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{10}{3} \ \&\ x \neq -3 \ \&\ x \neq 2 \,\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_\beta = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] - \{-3, 2\}.$$

□

7. $\gamma(u) = \sqrt[3]{u^2 - u + 6}$.

▼ $D_\gamma = \{\, u \in \mathbb{R} \,|\, \gamma(u) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, u \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt[3]{u^2 - u + 6} \in \mathbb{R} \,\right\} = \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow D_\gamma = \mathbb{R}$, ya que una raíz impar no tiene restricciones.

□

8. $\phi(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{9-2x}}$.

▼

$$D_\phi = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, \phi(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{9-2x}} \in \mathbb{R} \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt[3]{x-1} \in \mathbb{R} \;\&\; \sqrt{9-2x} \in \mathbb{R} \;\&\; \sqrt{9-2x} \neq 0 \,\right\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, 9 - 2x \geq 0 \;\&\; 9 - 2x \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, 9 - 2x > 0 \,\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, 9 > 2x \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < \frac{9}{2} \,\right\} \Rightarrow D_\phi = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right).$$

□

9. $F(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^3 - x}$.

▼

$$D_F = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, F(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^3 - x} \in \mathbb{R} \,\right\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, 9 - x^2 \geq 0 \;\&\; x^3 - x \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 9 \;\&\; x(x^2 - 1) \neq 0 \,\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, |\, x \,| \leq 3 \;\&\; x(x-1)(x+1) \neq 0 \,\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, -3 \leq x \leq 3 \;\&\; x \neq 0 \;\&\; x \neq 1 \;\&\; x \neq -1 \,\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_F = [-3, 3] - \{-1, 0, 1\}.$$

□

10. $G(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{5-x}$.

▼

$$D_G = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, G(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x+4} + \sqrt{5-x} \in \mathbb{R} \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x+4} \in \mathbb{R} \;\&\; \sqrt{5-x} \in \mathbb{R} \,\right\} = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x + 4 \geq 0 \;\&\; 5 - x \geq 0 \,\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -4 \;\&\; x \leq 5 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, -4 \leq x \leq 5 \,\} = [-4, 5] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_G = [-4, 5].$$

□

2.3 Álgebra de funciones

Ejercicios 2.3.1 *Dadas las funciones* $f(t) = t^2 - 9$, $g(y) = \sqrt{2y + 15}$ & $h(z) = \sqrt{10 - 3z}$, *obtener:*

1. $(f + g)(5)$.

▼ $$(f + g)(5) = f(5) + g(5) = \left[(5)^2 - 9\right] + \sqrt{2(5) + 15} = 25 - 9 + \sqrt{25} = = 16 + 5 = 21.$$

□

2. $(gf)(-3)$.

▼ $(gf)(-3) = [g(-3)]\,[f(-3)] = \sqrt{2(-3) + 15}\,[(-3)^2 - 9] = \sqrt{9}\,[0] = 0.$ □

3. $\left(\dfrac{h}{f}\right)(2)$.

▼ $$\left(\frac{h}{f}\right)(2) = \frac{h(2)}{f(2)} = \frac{\sqrt{10 - 3(2)}}{(2)^2 - 9} = \frac{\sqrt{4}}{-5} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}.$$ □

4. $(g - f)\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

▼ $$(g - f)\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right) + 15} - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 9\right] = = \sqrt{16} - \frac{1}{4} + 9 = 4 - \frac{1}{4} + 9 = 13 - \frac{1}{4} = \frac{52 - 1}{4} = \frac{51}{4}\,.$$

□

5. $(gh)(4)$.

▼ $(gh)(4) = [g(4)]\,[h(4)] = \sqrt{2(4) + 15}\,\sqrt{10 - 3(4)} = \sqrt{23}\,\sqrt{-2}.$

Pero $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$, por lo que $\sqrt{23}\,\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

Entonces $(gh)(4)$ no está definida, es decir, $4 \notin D_{gh}$. □

6. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-8)$.

▼ $$\left(\frac{f}{g}\right)(-8) = \frac{f(-8)}{g(-8)} = \frac{8^2 - 9}{\sqrt{2(-8) + 15}} = \frac{55}{\sqrt{-1}}.$$

Pero $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$, por lo cual $\dfrac{55}{\sqrt{-1}} \notin \mathbb{R}$.

Entonces $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-8)$ no está definida, es decir, $-8 \notin D_{\frac{f}{g}}$. □

7. $(g + h)(x)$.

▼ $(g + h)(x) = g(x) + h(x) = \sqrt{2x + 15} + \sqrt{10 - 3x}.$ □

8. $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$.

▼ $$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{2x + 15}}{x^2 - 9}.$$ □

9. $(fh)(x)$.

▼ $(fh)(x) = f(x)h(x) = (x^2 - 9)\sqrt{10 - 3x}$. □

10. $(h - f)(x)$.

▼ $(h - f)(x) = h(x) - f(x) = \sqrt{10 - 3x} - (x^2 - 9)$. □

11. $\left(\dfrac{h - g}{f}\right)(x)$.

▼ $\left(\dfrac{h - g}{f}\right)(x) = \dfrac{(h - g)(x)}{f(x)} = \dfrac{h(x) - g(x)}{f(x)} = \dfrac{\sqrt{10 - 3x} - \sqrt{2x + 15}}{x^2 - 9}$. □

12. $\left(\dfrac{fg}{h}\right)(x)$.

▼ $\left(\dfrac{fg}{h}\right)(x) = \dfrac{(fg)(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)g(x)}{h(x)} = \dfrac{(x^2 - 9)\sqrt{2x + 15}}{\sqrt{10 - 3x}}$. □

13. Los dominios de las funciones f, g & h.

▼ El dominio de la función f es:

$$D_f = \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(t) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} \,\middle|\, t^2 - 9 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; D_f = \mathbb{R}.$$

El dominio de la función g es:

$$D_g = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(y) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{2y + 15} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2y + 15 \geq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq -\frac{15}{2} \right\} = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) \;\Rightarrow\; D_g = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right).$$

El dominio de la función h es:

$$D_h = \left\{ z \in \mathbb{R} \,\middle|\, h(z) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{10 - 3z} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{R} \,\middle|\, 10 - 3z \geq 0 \right\} =$$
$$= \left\{ z \in \mathbb{R} \,\middle|\, z \leq \frac{10}{3} \right\} = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \;\Rightarrow\; D_h = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right].$$

□

14. El dominio de la función: $g + h$.

▼ El dominio de la función $g + h$ es:

$$D_{g+h} = D_g \cap D_h = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] = \left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right].$$

□

15. El dominio de la función: $\dfrac{g}{f}$.

▼ El dominio de la función $\dfrac{g}{f}$ es:

$$D_{\frac{g}{f}} = \left(D_g \cap D_f\right) - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) = 0 \right\} =$$
$$= \left(\left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) \cap \mathbb{R}\right) - \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 9 = 0 \right\} = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) - \{-3, 3\} =$$
$$= \left[-\frac{15}{2}, -3\right) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty).$$

□

16. El dominio de la función: fh.

▼ El dominio de la función fh es:

$$D_{fh} = D_f \cap D_h = \mathbb{R} \cap \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right].$$

□

17. El dominio de la función: $h - f$.

▼ El dominio de la función $h - f$ es:

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \cap \mathbb{R} = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right].$$

□

18. El dominio de la función: $\dfrac{h}{g}$.

▼ El dominio de la función $\dfrac{h}{g}$ es:

$$\begin{aligned} D_{\frac{h}{g}} &= \left\{D_h \cap D_g\right\} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(x) = 0 \,\right\} = \\ &= \left\{\left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \cap \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right)\right\} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{2x + 15} = 0 \,\right\} = \\ &= \left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right] - \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x + 15 = 0 \,\right\} = \left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right] - \left\{-\frac{15}{2}\right\} = \\ &= \left(-\frac{15}{2}, \frac{10}{2}\right]. \end{aligned}$$

□

19. El dominio de la función: $\dfrac{fg}{h}$.

▼ El dominio de la función $\dfrac{fg}{h}$ es:

$$\begin{aligned} D_{\frac{fg}{h}} &= \left\{D_{fg} \cap D_h\right\} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, h(x) = 0 \,\right\} = \\ &= \left\{\left(D_f \cap D_g\right) \cap D_h\right\} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{10 - 3x} = 0 \,\right\} = \\ &= \left\{D_f \cap D_g \cap D_h\right\} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 10 - 3x = 0 \,\right\} = \\ &= \left\{\mathbb{R} \cap \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{10}{3}\right]\right\} - \left\{x = \frac{10}{3}\right\} = \\ &= \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] - \left\{\frac{10}{3}\right\} = \\ &= \left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right] - \left\{\frac{10}{3}\right\} = \left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right). \end{aligned}$$

□

20. El dominio de la función: $\dfrac{g+h}{gh}$.

▼ El dominio de la función $\dfrac{g+h}{gh}$ es:

$$
\begin{aligned}
D_{\frac{g+h}{gh}} &= \left\{ \left(D_{g+h}\right) \cap \left(D_{gh}\right) \right\} - \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; (gh)\,(x) = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \left(D_g \cap D_h\right) \cap \left(D_g \cap D_h\right) \right\} - \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; g(x)h(x) = 0 \right\} = \\
&= \left(D_g \cap D_h\right) - \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; g(x) = 0 \text{ o bien } h(x) = 0 \right\} = \\
&= \left\{ \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \right\} - \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sqrt{2x+15} = 0 \text{ o bien } \sqrt{10-3x} = 0 \right\} = \\
&= \left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right] - \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 2x+15 = 0 \text{ o bien } 10-3x = 0 \right\} = \\
&= \left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right] - \left\{ -\frac{15}{2}, \frac{10}{3} \right\} = \\
&= \left(-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right).
\end{aligned}
$$

□

2.4 Composición de funciones

Ejercicios 2.4.1

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{7-x}$ & $g(x) = |\,5-8x\,|$, obtener el dominio de f, $(f \circ g)(x)$ y el dominio de $f \circ g$.

▼ El dominio de $f(x) = D_f$ es el conjunto de las x que satisfacen

$$7 - x \geq 0 \;\Rightarrow\; 7 \geq x \;\Rightarrow\; x \in (-\infty, 7].$$

Por otro lado:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(|\,5-8x\,|) = \sqrt{7 - |\,5-8x\,|}\,.$$

Para calcular $D_{f \circ g}$, recordar que $D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \;\middle|\; g(x) \in D_f \right\}$.

Primero: se ve de inmediato que $D_g = R$.

Segundo:

$$
\begin{aligned}
g(x) \in D_f \;&\Rightarrow\; g(x) \in (-\infty, 7] \;\Rightarrow\; |\,5-8x\,| \leq 7 \;\Rightarrow\; -7 \leq 5-8x \leq 7 \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow\; -12 \leq -8x \leq 2 \;\Rightarrow\; \frac{12}{8} \geq x \geq -\frac{2}{8} \;\Rightarrow\; \frac{3}{2} \geq x \geq -\frac{1}{4} \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow\; x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Las dos condiciones anteriores nos dan

$$D_{f \circ g} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right].$$

□

2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{9-2x}$, $g(x) = |\,3x-4\,|$ & $h(x) = x^2-5$, obtener $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$ & $(f \circ g)(x)$, así como los dominios de las funciones $\dfrac{f}{h}$ & $f \circ g$.

▼ Calculamos

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{9-2x}}{x^2-5};$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(|\,3x-4\,|) = \sqrt{9-2\,|\,3x-4\,|}\,.$$

Tenemos así:

$$D_f = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 9-2x \geq 0 \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 9 \geq 2x \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{9}{2} \geq x \,\right\} = \left(-\infty, \frac{9}{2}\right];$$
$$D_g = \mathbb{R} \;\&\; D_h = \mathbb{R};$$

luego:

$$D_{\frac{f}{h}} = \left\{\, x \in D_f \cap D_h \,\middle|\, h(x) \neq 0 \,\right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \cap \mathbb{R} \,\middle|\, x^2-5 \neq 0 \right\} = \left\{\, x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \,\middle|\, x^2 \neq 5 \right\} =$$
$$= \left\{\, x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \,\middle|\, |\,x\,| \neq \sqrt{5} \right\} = \left\{\, x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \,\middle|\, x \neq \pm\sqrt{5} \right\} =$$
$$= \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] - \left\{ -\sqrt{5}, \sqrt{5} \right\}.$$

Por último:

$$D_{(f\circ g)} = \left\{\, x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \,\right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,3x-4\,| \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \right\} = \left\{\, x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,3x-4\,| \leq \frac{9}{2} \right\}.$$

Pero

$$|\,3x-4\,| \leq \frac{9}{2} \text{ equivale a } -\frac{9}{2} \leq 3x-4 \leq \frac{9}{2};$$

sumando 4

$$4-\frac{9}{2} \leq 3x \leq \frac{9}{2}+4.$$
$$\frac{8-9}{2} \leq 3x \leq \frac{9+8}{2} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2} \leq 3x \leq \frac{17}{2}$$

y multiplicando por $\dfrac{1}{3}$:

$$-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{17}{6} \;\Rightarrow\; x \in \left[-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right].$$

Entonces:

$$D_{f\circ g} = \left[-\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right].$$

□

3. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x+3}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2-5}$. Calcular, obtener o determinar, según proceda:

   a. Dominios de f, g, $f+g$ & fg.

   b. $f[g(-3)]$, $g[f(6)]$ y el dominio de $g[f(x)]$.

▼ a. Calculamos

$$\begin{aligned}
D_f &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x+3 \geq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3 \,\} = [-3, +\infty);\\
D_g &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 5 \,\} =\\
&= \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid |\, x \,| \neq \sqrt{5} \,\right\} = \mathbb{R} - \left\{ -\sqrt{5}, \sqrt{5} \right\};\\
D_{f+g} &= D_f \cap D_g = [-3, +\infty) \cap \left\{ \mathbb{R} - \left\{ \pm\sqrt{5} \right\} \right\} = [-3, +\infty) - \left\{ \pm\sqrt{5} \right\} =\\
&= [-3, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty);\\
D_{fg} &= D_f \cap D_g = D_{f+g} = [-3, -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty).
\end{aligned}$$

b. Tenemos así:

$$\begin{aligned}
f[g(-3)] &= f\left(\frac{1}{(-3)^2 - 5}\right) = f\left(\frac{1}{9-5}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) =\\
&= \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \sqrt{\frac{1+12}{4}} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2};\\
g[f(6)] &= g(\sqrt{6+3}) = g(\sqrt{9}) = g(3) = \frac{1}{3^2 - 5} = \frac{1}{9-5} = \frac{1}{4};\\
D_{g\circ f} &= \{\, x \in D_f \mid f(x) \in D_g \,\} = \left\{\, x \in [-3, +\infty) \mid \sqrt{x+3} \neq \pm\sqrt{5} \,\right\} =\\
&= \{\, x \in [-3, +\infty) \mid x + 3 \neq 5 \,\} = \{\, x \in [-3, +\infty) \mid x \neq 2 \,\} =\\
&= [-3, 2) \cup (2, +\infty).
\end{aligned}$$

□

4. Si $f(x) = x^3 + 2$ & $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$:

a. Encuentre los dominios de f y de g.

b. Dé las reglas de correspondencia así como los dominios de las siguientes funciones: $\dfrac{g}{f}$; $g \circ f$ & $f \circ g$.

▼

a. $D_f = \mathbb{R}$ y $D_g = \mathbb{R} - \{\, 1 \,\}$.

b. Calculamos:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\dfrac{2}{x-1}}{x^3+2} = \frac{2}{(x-1)(x^3+2)}.$$

Observamos que:

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{\, 1 \,\}$$

y que

$$f(x) = 0 \text{ si } x^3 + 2 = 0, \text{ es decir, si } x^3 = -2 \text{ o bien } x = \sqrt[3]{-2};$$

luego:

$$D_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \left\{ 1, \sqrt[3]{-2} \right\};$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^3 + 2) = \frac{2}{(x^3 + 2) - 1} = \frac{2}{x^3 + 1};$$

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 + 2 \neq 1 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 \neq -1 \} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \sqrt[3]{-1} \right\} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \} = \mathbb{R} - \{ -1 \};$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{2}{x-1}\right) = \left(\frac{2}{x-1}\right)^3 + 2 =$$

$$= \frac{8 + 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x + 6}{(x-1)^3}; \text{ y también}$$

$$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \} = \left\{ x \neq 1 \,\middle|\, \frac{2}{x-1} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} - \{ 1 \},$$

pues $x \neq 1$ implica que $\dfrac{2}{x-1} \in \mathbb{R}$.

□

5. Si $f(x) = \sqrt{4 - x}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, obtener, reduciendo a su mínima expresión: $(f \cdot g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$. En cada caso proporcionar el dominio de la función.

▼ Tenemos

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{4 - x} \cdot \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{4 - x}}{x^2 - 1};$$

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{4 - x}) = \frac{1}{(\sqrt{4 - x})^2 - 1} = \frac{1}{4 - x - 1} = \frac{1}{3 - x}.$$

Como

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid 4 - x \geq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4 \} = (-\infty, 4]$$

y

$$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \neq 1 \};$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{ -1, +1 \},$$

hallamos:

$$D_{f \cdot g} = (-\infty, 4] \cap \{ \mathbb{R} - \{ \pm 1 \} \} = (-\infty, 4] - \{ \pm 1 \} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 4];$$

$$D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} = \left\{ x \leq 4 \mid \sqrt{4 - x} \neq \pm 1 \right\};$$

y finalmente $\sqrt{4 - x} = \pm 1$ si $4 - x = 1$; es decir, si $x = 3$ y por lo tanto:

$$D_{g \circ f} = (-\infty, 4] - \{ 3 \} = (-\infty, 3) \cup (3, 4].$$

□

6. Sean: $f(x) = \sqrt{x + 1}$ & $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

   a. Obtenga los dominios de f y de g.
   b. Obtenga reglas de correspondencia y dominios de las funciones $f + g$, f/g, $f \circ g$, $g \circ f$.

▼ a. Vemos que:

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \} = [-1, +\infty) ;$$
$$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \neq 0 \} = \mathbb{R} \text{ (nótese que } x^2 + 1 > 0 \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R}).$$

b. Los dominios que se piden son:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = D_f = [-1, +\infty) ;$$
$$D_{\frac{f}{g}} = \{ D_f \cap D_g \} - \{ x \in D_g \mid g(x) = 0 \} = D_f - \varnothing = D_f = [-1, +\infty) ;$$
$$D_{f\circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{x^2+1} \geq -1 \right\} = \mathbb{R}, \text{ pues } \frac{1}{x^2+1} \geq 0 > -1;$$
$$D_{g\circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \} = \left\{ x \in [-1, +\infty) \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \right\} = [-1, +\infty) ,$$
$$\text{pues } x \in [-1, +\infty) \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}.$$

Las reglas de correspondencia que se piden son la siguientes:

$$(f + g)(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2+1};$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\dfrac{1}{x^2+1}} = (x^2+1)\sqrt{x+1};$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2+1} + 1} = \sqrt{\frac{1 + x^2 + 1}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}};$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2 + 1} = \frac{1}{x+1+1} = \frac{1}{x+2}.$$

□

7. Si $f(x) = \sqrt{|\,3 - 4x\,| - 4}$, $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$ & $h(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4}$, encontrar:

a. El dominio de f.

b. Los dominios de g y de h.

c. $(h \circ g)(x)$ y el dominio de $h \circ g$.

▼

a. La función $f(x)$ está definida siempre y cuando el radicando sea no negativo

$$|\,3 - 4x\,| - 4 \geq 0 \Rightarrow |\,3 - 4x\,| \geq 4 .$$

Esta última desigualdad es equivalente a las siguientes:

$3x - 4 \leq -4$	o bien	$3x - 4 \geq 4;$
$7 \leq 4x$	o bien	$-1 \geq 4x;$
$\frac{7}{4} \leq x$	o bien	$-\frac{1}{4} \geq x;$
$x \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$	o bien	$x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right].$

Por lo tanto:

$$D_f = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{4}, +\infty\right) .$$

b. De igual manera $g(x)$ está definida si

$$3 - 2x \geq 0 \;\Rightarrow\; 3 \geq 2x \;\Rightarrow\; \frac{3}{2} \geq x .$$

Por lo tanto:

$$D_g = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] .$$

Se ve que $D_h = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, ya que $x = -2$ & $x = 2$ son los ceros o raíces de $x^2 - 4$.

c. Calculamos:

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h\left(\sqrt{3-2x}\right) = \frac{4}{(\sqrt{3-2x})^2 - 4} = \frac{4}{-1-2x} = -\frac{4}{2x+1} ;$$

$x \in D_{h\circ g}$ si cumple dos condiciones simultáneamente:

i. $x \in D_g \;\Rightarrow\; x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$.

ii. Y $g(x) \in D_h \;\Rightarrow\; \sqrt{3-2x} \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Nos preguntamos para qué valores de x la raíz cuadrada es igual a -2 y a 2.
Nunca es igual a -2 ya que es no negativa.
$\sqrt{3-2x} = 2 \;\Rightarrow\; 3 - 2x = 4 \;\Rightarrow\; -2x = 1 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{1}{2}$.

Tenemos entonces que:

$$D_{h\circ g} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] - \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] .$$

□

8. Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t+3}$, $g(z) = z^2 - 1$ & $h(w) = \sqrt{5-w}$, obtener:

$$\left(\frac{f+h}{g}\right)(x),\; (g \circ h)(x) \;\&\; (f \circ g)(x) ,$$

así como los dominios de las respectivas funciones.

▼ Calculando $\left(\dfrac{f+h}{g}\right)(x)$ tenemos:

$$\left(\frac{f+h}{g}\right)(x) = \frac{(f+h)(x)}{g(x)} = \frac{f(x)+h(x)}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}}{x^2-1} .$$

Dominios:

$$D_f = \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t + 3 \geq 0 \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; t \geq -3 \right\} = [-3, +\infty) ;$$
$$D_g = \mathbb{R};$$
$$D_h = \left\{ w \in \mathbb{R} \;\middle|\; 5 - w \geq 0 \right\} = \left\{ w \in \mathbb{R} \;\middle|\; w \leq 5 \right\} = (-\infty, 5] .$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
D_{\frac{f+h}{g}} &= \{\, D_f \cap D_h \cap D_g \,\} - \{\, x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0 \,\} = \\
&= [-3, +\infty) \cap (-\infty, 5] - \{\, \pm 1 \,\} = [-3, 5] - \{\, \pm 1 \,\}\,; \\
(g \circ h)(x) &= g[h(x)] = g(\sqrt{5 - x}) = (\sqrt{5 - x})^2 - 1 = 5 - x - 1 = 4 - x\,; \\
D_{g \circ h} &= \{\, x \in D_h \mid h(x) \in D_g \,\} = \left\{\, x \in (-\infty, 5] \mid \sqrt{5 - x} \in \mathbb{R} \,\right\} = (-\infty, 5]\ ; \\
(f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1 + 3} = \sqrt{x^2 + 2}\,; \\
D_{f \circ g} &= \{\, x \in D_g \mid g(x) \in D_f \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1) \in [-3, +\infty) \,\} = \\
&= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq -3 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq -2 \,\} = \mathbb{R} \text{ pues } x^2 \geq 0 > -2\,.
\end{aligned}
$$

□

9. Sean $f(v) = v^2 - 2v - 3$ & $g(u) = \sqrt{3 - u}$, determine:

   a. Los dominios de f & g.
   b. $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$, indicando el dominio de cada una de las funciones.

▼

a. Dominios:
$f(v) = v^2 - 2v - 3$ es una función cuyo dominio es $D_f = \mathbb{R}$.
El dominio de la función $g(u) = \sqrt{3 - u}$ es:

$$
\begin{aligned}
D_g &= \{\, u \in \mathbb{R} \mid g(u) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{\, u \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3 - u} \in \mathbb{R} \,\right\} = \\
&= \{\, u \in \mathbb{R} \mid 3 - u \geq 0 \,\} = \{\, u \in \mathbb{R} \mid 3 \geq u \,\} = \\
&= \{\, u \in \mathbb{R} \mid u \leq 3 \,\} = (-\infty, 3]\,.
\end{aligned}
$$

b. Calculamos:

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f(\sqrt{3 - x}) = \\
&= (\sqrt{3 - x})^2 - 2\sqrt{3 - x} - 3 = 3 - x - 2\sqrt{3 - x} - 3 = \\
&= -x - 2\sqrt{3 - x};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{f \circ g} &= \{\, x \in D_g \mid g(x) \in D_f \,\} = \\
&= \left\{\, x \in (-\infty, 3] \mid \sqrt{3 - x} \in \mathbb{R} \,\right\} = \{\, x \leq 3 \mid 3 - x \geq 0 \,\} = \\
&= \{\, x \leq 3 \mid x \leq 3 \,\} = (-\infty, 3]\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g(x^2 - 2x - 3) = \sqrt{3 - (x^2 - 2x - 3)} = \\
&= \sqrt{3 - x^2 + 2x + 3} = \sqrt{-x^2 + 2x + 6};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{g \circ f} &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \ \&\ f(x) \in D_g \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 2x - 3) \in (-\infty, 3] \,\} = \\
&= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 \leq 3 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 6 \leq 0 \,\}\,.
\end{aligned}
$$

Ahora bien $x^2 - 2x - 6 = 0$ cuando

$$
x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7};
$$

además $x^2 - 2x - 6 \le 0$ cuando

$$(x - 1 - \sqrt{7})(x - 1 + \sqrt{7}) \le 0.$$

Esta última desigualdad se cumple cuando

$$\begin{array}{ccccccc} x - 1 - \sqrt{7} \le 0 & \& & x - 1 + \sqrt{7} \le 0 & \text{o bien} & x - 1 - \sqrt{7} \le 0 & \& & x - 1 + \sqrt{7} \le 0; \\ x \le 1 + \sqrt{7} & \& & x \le 1 - \sqrt{7} & \text{o bien} & x \le 1 + \sqrt{7} & \& & x \le 1 - \sqrt{7}; \\ & x \in \varnothing & & \text{o bien} & & x \in \left(1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}\right), & \end{array}$$

es decir, cuando $1 - \sqrt{7} \le x \le 1 + \sqrt{7}$. Luego,

$$D_{g\circ f} = \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 2x - 3 \le 3 \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 2x - 6 \le 0 \right\} = [1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}].$$

□

10. Sean $f(x) = \sqrt{x - 1}$ & $g(x) = |\,3x + 2\,|$, determine:

a. Los dominios de f & g.

b. $(f \circ g)(x)$ & $(g \circ f)(x)$ indicando el dominio de cada función.

▼

a. El dominio de $f(x) = \sqrt{x - 1}$ es:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{x - 1} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x - 1 \ge 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ge 1 \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_f = [1, +\infty).$$

El dominio de $g(x) = |\,3x + 2\,|$ es:

$$D_g = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,3x + 2\,| \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \Rightarrow D_g = \mathbb{R}.$$

b. Calculamos:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x) - 1} = \sqrt{|\,3x + 2\,| - 1};$$
$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, g(x) \in [1, +\infty) \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,3x + 2\,| \in [1, +\infty) \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,3x + 2\,| \ge 1 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3x + 2 \le -1 \text{ o bien } 3x + 2 \ge 1 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 3x \le -3 \text{ o bien } 3x \ge -1 \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \le -1 \text{ o bien } x \ge -\frac{1}{3} \right\} = \\ &= (-\infty, -1] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right) = \\ &= \mathbb{R} - \left(-1, -\frac{1}{3}\right); \end{aligned}$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(\sqrt{x - 1}) = |3\sqrt{x - 1} + 2|;$$
$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \\ &= \left\{ x \in [1, +\infty) \,\middle|\, \sqrt{x - 1} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \in [1, +\infty) \,\middle|\, x - 1 \ge 0 \right\} = \\ &= \left\{ x \ge 0 \,\middle|\, x \ge 1 \right\} = [1, +\infty). \end{aligned}$$

□

11. Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t-11}$ & $g(u) = |\,2u-1\,|$, obtenga $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y los dominios de las funciones $f \circ g$ & $g \circ f$.

▼ Se tiene $D_f = [11, +\infty)$ y $D_g = \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(|\,2x-1\,|) = \sqrt{|\,2x-1\,|-11}$$

y su dominio es:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \left\{ x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,2x-1\,| \in [11, +\infty) \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |\,2x-1\,| \geq 11 \right\} = \\ &= \left\{ x \,\middle|\, 2x-1 \leq -11 \text{ o bien } 2x-1 \geq 11 \right\} = \\ &= \left\{ x \,\middle|\, 2x \leq -10 \text{ o bien } 2x \geq 12 \right\} = \left\{ x \,\middle|\, x \leq -5 \text{ o bien } x \geq 6 \right\} = \\ &= (-\infty, -5] \cup [6, +\infty) = \mathbb{R} - (-5, 6). \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = |\,2f(x)-1\,| = \left|2\sqrt{x-11}-1\right|$$

y su dominio es:

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g \right\} = \\ &= \left\{ x \in [11, +\infty) \,\middle|\, \sqrt{x-11} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \geq 11 \,\middle|\, x \geq 11 \right\} = [11, +\infty)\,. \end{aligned}$$

□

12. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, encuentre dos funciones g para las cuales $(f \circ g)\,(x) = x^2 - 4x + 5$.

▼ Tenemos

$$(f \circ g)\,(x) = f\,[g(x)] = x^2 - 4x + 5$$

y también

$$f\,[g(x)] = [g(x)]^2 + 2g(x) + 2;$$

luego:

$$[g(x)]^2 + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \;\Leftrightarrow\; [g(x)]^2 + 2g(x) - x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Usando $a = 1$, $b = 2$ y $c = -x^2 + 4x - 3$ para resolver la cuadrática obtenemos:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(-x^2 + 4x - 3)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 + x^2 - 4x + 3} = \\ &= -1 \pm \sqrt{x^2 - 4x + 4} = -1 \pm \sqrt{(x-2)^2} = \\ &= -1 \pm |\,x-2\,| \end{aligned}$$

y de aquí que encontremos dos soluciones:

$$g_1(x) = -1 + |\,x-2\,| = \begin{cases} -1 + (x-2) & \text{si } x-2 \geq 0 \\ -1 + (-x+2) & \text{si } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 2; \\ -x+1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

y

$$g_2(x) = -1 - |\,x-2\,| = \begin{cases} -1 - (x-2) & \text{si } x-2 \geq 0 \\ -1 - (-x+2) & \text{si } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \geq 2; \\ x-3 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

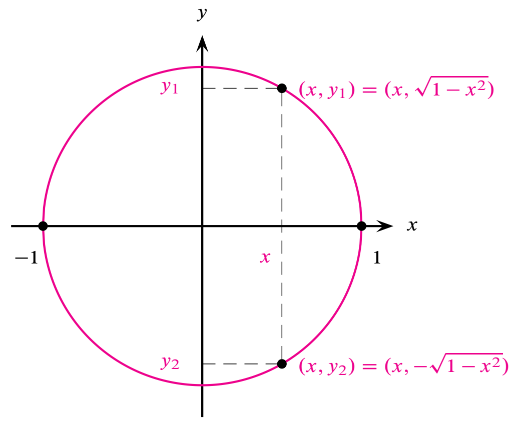
□

2.5 Gráfica de una función real de variable real

Ejercicios 2.5.1

1. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ representa a una circunferencia de radio 1 y centro en el origen. ¿Puede considerarse a esta curva como la gráfica de una función? Justifique su respuesta.

▼ La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es una curva plana. No puede ser considerada como la gráfica de alguna función $y = \phi(x)$, puesto que a cada número $-1 < x < 1$ le corresponden dos valores diferentes de y que son $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.



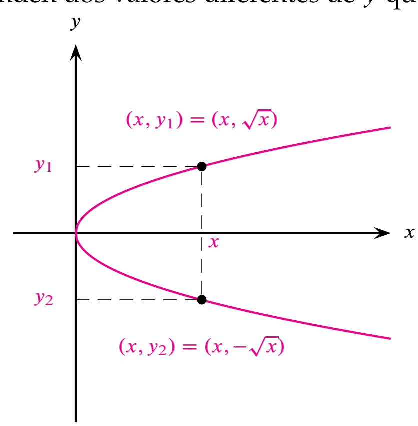
Es decir, a cada $x \in (-1, 1)$ no le corresponde un único valor de y.

□

2. La ecuación $y^2 = x$ representa a una parábola en el plano xy. ¿Puede ser considerada esta parábola como la gráfica de una función $y = f(x)$? Justifique su respuesta.

▼ La parábola $x = y^2$ es una curva plana que se abre hacia la derecha con eje horizontal.

A cada número $x > 0$ le corresponden dos valores diferentes de y que son $y = \pm\sqrt{x}$.

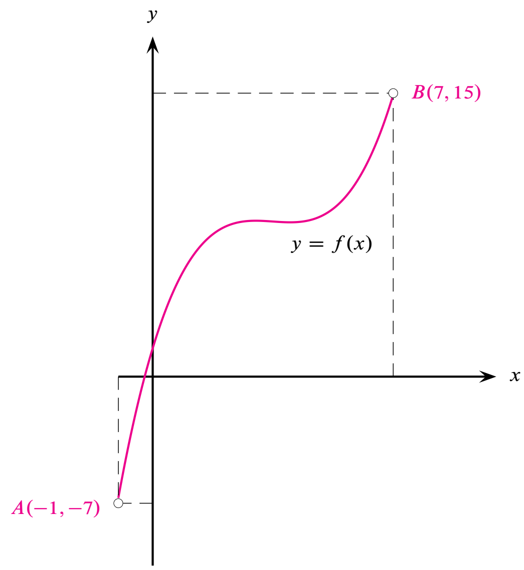


Entonces esta curva no puede ser considerada como la gráfica de alguna función $y = \phi(x)$.

□

Las curvas de los tres siguientes apartados son gráficas de funciones y los puntos A y B no pertenecen a dichas gráficas. Determinar dominio, rango y el número de raíces de cada función.

3.



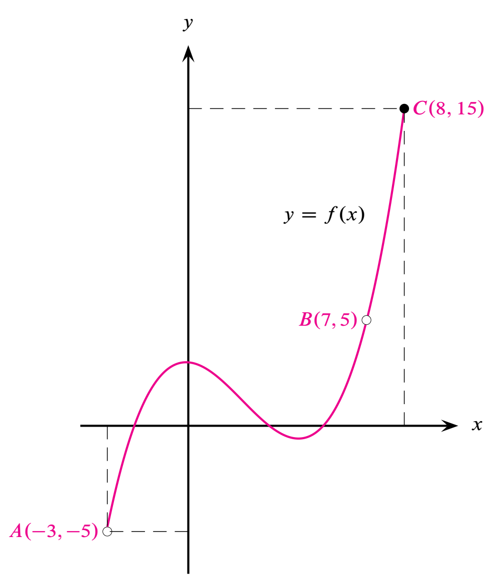
▼ El dominio de la función $y = f(x)$ es: $D_f = (-1, 7)$.

El rango de la función $y = f(x)$ es: $R_f = (-7, 15)$.

La función $y = f(x)$ tiene sólo una raíz, que es negativa.

□

4.



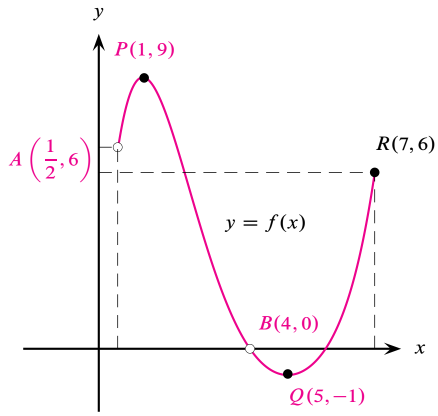
▼ El dominio de la función $y = f(x)$ es: $D_f = (-3, 8] - \{7\}$.

El rango de la función $y = f(x)$ es: $R_f = (-5, 15] - \{5\}$.

La función $y = f(x)$ tiene 3 raíces.

□

5.



▼ El dominio de la función $y = f(x)$ es: $D_f = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \cup (4, 7]$.

El rango de la función $y = f(x)$ es: $R_f = [-1, 9]$.

La función $y = f(x)$ tiene una raíz $x \neq 4$.

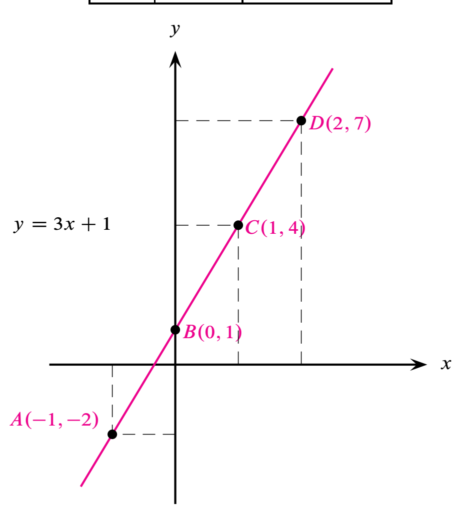
□

Mediante una tabla de valores, obtener un bosquejo de la gráfica de las funciones de los cuatro siguientes apartados. Determinar además (en cada caso) dominio, rango y raíces de la función.

6. $f(x) = 3x + 1$.

▼

x	$f(x)$	$P(x, y)$
-1	-2	$A(-1, -2)$
0	1	$B(0, 1)$
1	4	$C(1, 4)$
2	7	$D(2, 7)$



El dominio de f es: $D_f = \mathbb{R}$.

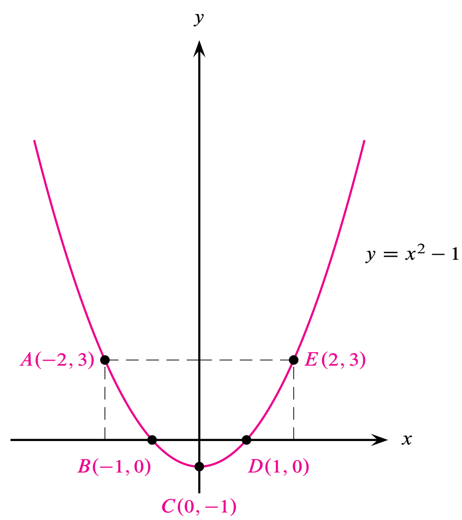
El rango de f es: $R_f = \mathbb{R}$.

La función f tiene una raíz: $x = -\frac{1}{3}$. □

7. $g(x) = x^2 - 1$.

▼

x	$g(x)$	$P(x,y)$
-2	3	$A(-2,3)$
-1	0	$B(-1,0)$
0	-1	$C(0,-1)$
1	0	$D(1,0)$
2	3	$E(2,3)$



El dominio de g es: $D_g = \mathbb{R}$.

El rango de g es: $R_g = [-1, +\infty)$.

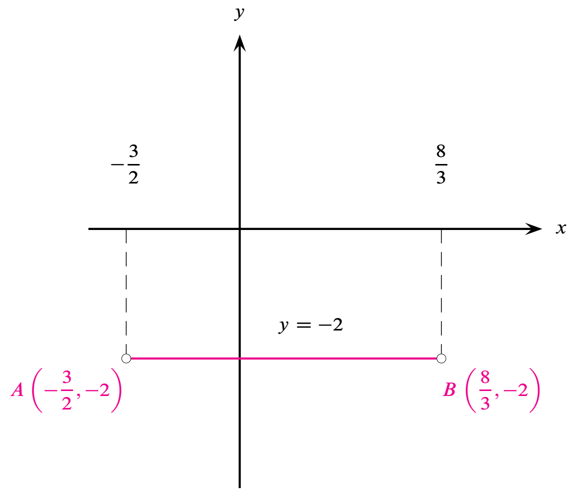
La función g tiene 2 raíces: $x = -1$ & $x = 1$.

□

8. $h(x) = -2 \quad \text{con} \quad -\frac{3}{2} < x < \frac{8}{3}$.

▼

x	$h(x)$	$P(x,y)$
$-\frac{3}{2}$	-2	$A\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$
$\frac{8}{3}$	-2	$B\left(\frac{8}{3}, -2\right)$



El dominio de h es: $D_h = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{8}{3}\right)$.

El rango de h es: $R_h = \{-2\}$.

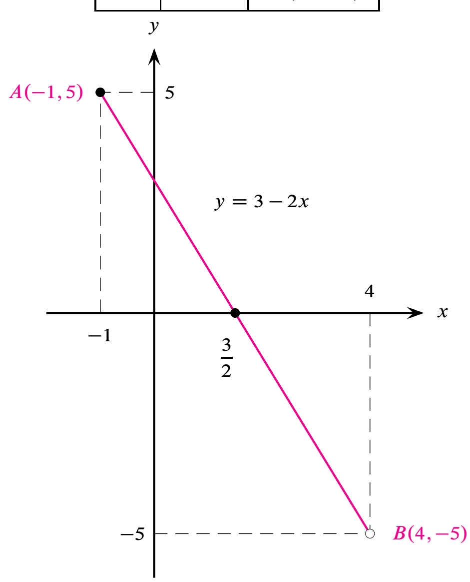
La función h no tiene raíces.

□.

9. $f(x) = 3 - 2x \quad$ con $\quad -1 \le x < 4$.

▼

x	$f(x)$	$P(x, y)$
-1	5	$A(-1, 5)$
4	-5	$B(4, -5)$



El dominio de f es: $D_f = [-1, 4)$.

El rango de f es: $R_f = (-5, 5]$.

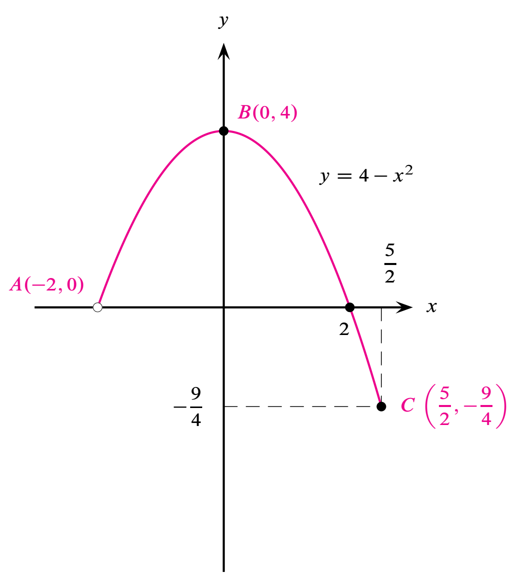
La función f tiene una raíz: $x = \dfrac{3}{2}$.

□

10. $g(x) = 4 - x^2$ con $-2 < x \le \dfrac{5}{2}$.

▼

x	$g(x)$	$P(x, y)$
-2	0	$A(-2, 0)$
0	4	$B(0, 4)$
$\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$C\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$



El dominio de g es: $D_g = \left(-2, \dfrac{5}{2}\right]$.

El rango de g es: $R_g = \left[-\dfrac{9}{4}, 4\right]$.

La función g tiene sólo una raíz: $x = 2$. □

2.6 Tipos de funciones

Ejercicios 2.6.1

1. Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

▼ A simple vista parece que no es par ni impar, lo cual podemos comprobar, ya que:

$$1 \in D_f \text{, pero } -1 \notin D_f\text{; luego, } f(-x) = \pm f(x) \text{ no se cumple para } x = 1\,.$$

Por lo que f no es par ni impar. □

2. Dada la función $f(x) = \sqrt[4]{x^3 - x}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

▼ A simple vista parece que no es par ni impar, lo cual podemos comprobar, ya que:

$$2 \in D_f \text{, pero } -2 \notin D_f \text{; luego, } f(-x) = \pm f(x) \text{ no se cumple para } x = 2.$$

Por lo que f no es par ni impar. □

3. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x^2 + 1}$, señale si es par, impar o ninguna de las dos cosas.

▼ Es impar puesto que:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2(-x)^3 - (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{2(-x^3) + x}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{-2x^3 + x}{x^2 + 1} = -\frac{-(-2x^3 + x)}{x^2 + 1} = \\ &= -\frac{2x^3 - x}{x^2 + 1} = -f(x)\,. \end{aligned}$$

□

4. Si f es par ¿será $g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ par?

▼ Sí, puesto que:

$$g(-x) = [(-x)^2 + 1]f(-x) = (x^2 + 1)f(x) = g(x).$$

□

5. Si f & g son impares ¿será $h(x) = (f + g)(x)$ impar?

▼ Sí, puesto que:

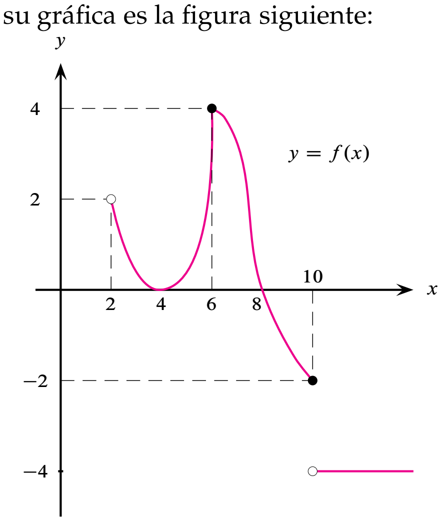
$$\begin{aligned} h(-x) &= (f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = \\ &= -f(x) + [-g(x)] = -f(x) - g(x) = \\ &= -[f(x) + g(x)] = -[(f + g)(x)] = \\ &= -h(x)\,. \end{aligned}$$

Y de aquí que:

$$h(x) = -h(-x).$$

□

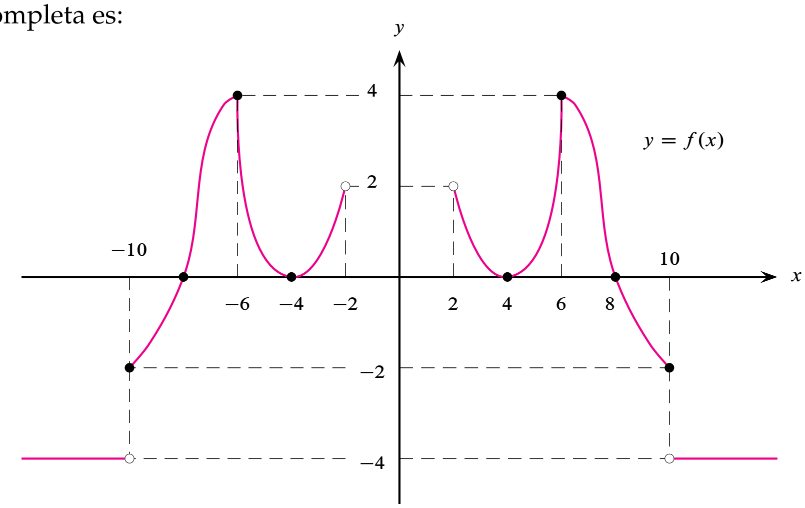
6. La función f es par, y parte de su gráfica es la figura siguiente:



a. Complete la gráfica de f.

b. Obtenga su dominio, raíces y rango, y además determine a partir de la gráfica completada las soluciones de $f(x) > 0$ y de $f(x) < 0$.

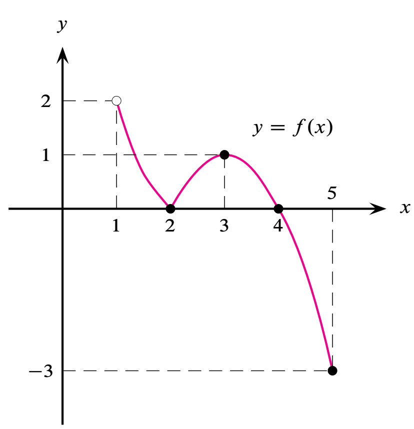
▼ a. La gráfica completa es:



b. Su dominio: $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
Raíces: $x = -8, -4, 4$ & 8.
Rango: $R_f = \{-4\} \cup [-2, 4]$.
$f(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-8, -4) \cup (-4, -2) \cup (2, 4) \cup (4, 8)$.
$f(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -8) \cup (8, +\infty)$.

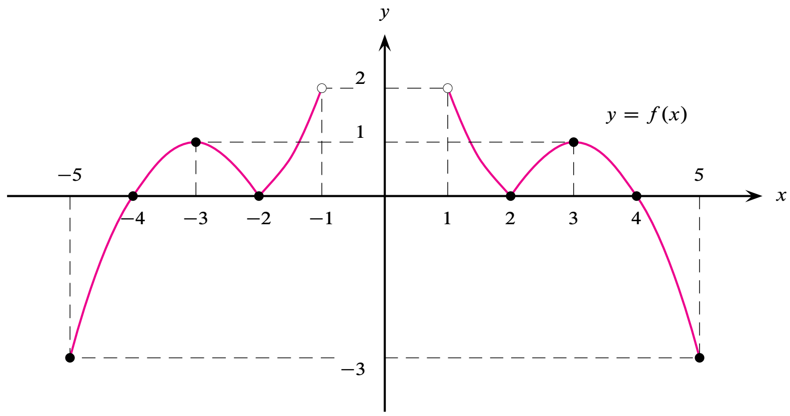
□

7. Si f es una función par cuya gráfica para $x \geq 1$ es la que se indica en la figura,



completar la gráfica, indicar su dominio, sus raíces y su rango.

▼ La gráfica completa es:



Dominio: $D_f = [-5, -1) \cup (1, 5]$.

Raíces: $x = -4$, $x = -2$, $x = 2$ & $x = 4$.

Rango: $R_f = [-3, 2)$.

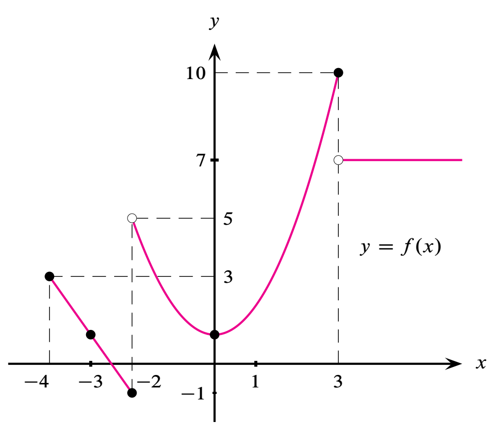
□

8. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } -4 \le x \le -2\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 < x \le 3\,; \\ 7 & \text{si } 3 < x\,. \end{cases}$$

a. Obtener su gráfica.
b. Determinar su dominio y rango.
c. Calcular: $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$ & $f(1\,000)$.

▼ a. La gráfica de f es:



b. $D_f = [-4, +\infty)$; $R_f = [-1, 10]$.

c. $f(-4) = 3$, $f(-3) = 1$, $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(3) = 10$, $f(5) = 7$ & $f(1\,000) = 7$.

□

9. Dada la siguiente función

$$g(x) = \begin{cases} -\,|\,x + 2\,| & \text{si } x < -2\,; \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 2\,; \\ x - 2 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

Obtenga su gráfica y diga si es par, impar o ninguna de las dos. Determinar su rango.

▼ Observemos que $x < -2$ implica que $x + 2 < 0$, luego para este caso:

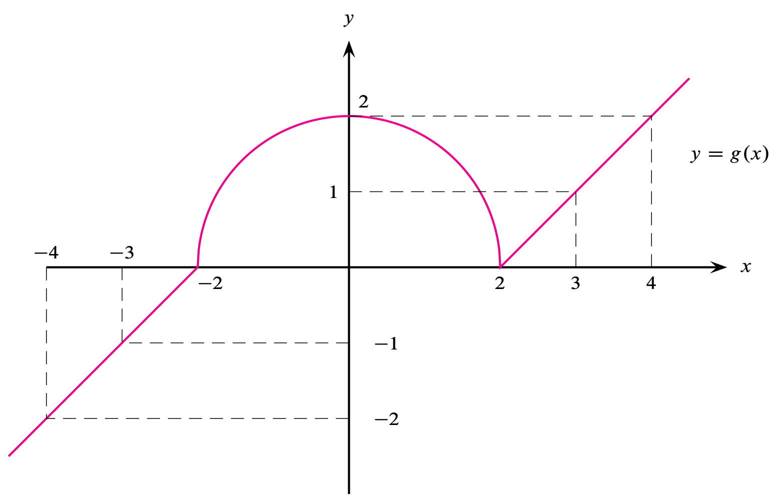
$$|\, x + 2 \,| = -(x + 2) \;\Rightarrow\; -|\, x + 2 \,| = -[-(x + 2)] = x + 2;$$

sabemos que la gráfica de $y = x + 2$ es la recta de pendiente 1 y de ordenada en el origen 2.

Si hacemos $g(x) = y$, vemos que para $-2 \le x \le 2$ tenemos

$$y = \sqrt{4 - x^2} \;\Rightarrow\; y^2 = 4 - x^2 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 4 \;\Rightarrow\; (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2,$$

que es la circunferencia de centro en el origen y radio 2; así $y = \sqrt{4 - x^2}$ es su semicircunferencia superior; $y = x - 2$ es la recta de pendiente 1 y ordenada en el origen -2; luego, la gráfica de g es:



No es par ni impar; además $R_g = \mathbb{R}$. □

10. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < -5\,; \\ \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \le x \le 5\,; \\ 5 - x & \text{si } x > 5\,. \end{cases}$$

Esboce su gráfica, obtenga el rango, las raíces y diga si es par, impar o ni una cosa ni la otra.

▼ Grafiquemos primero la función:

a. Para $x < -5$, la gráfica de f es la recta $y = x + 5$.

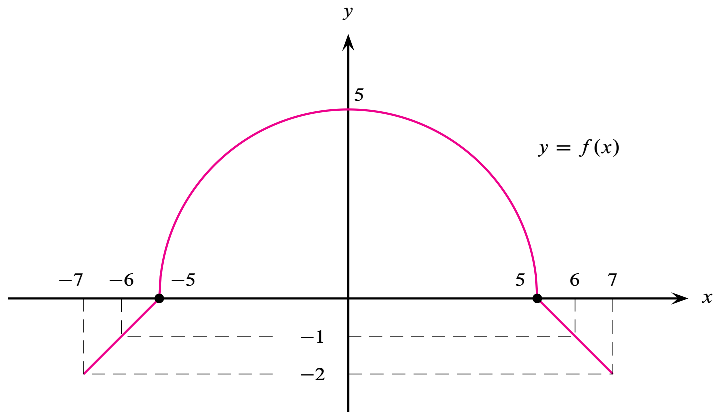
b. Para $x > 5$, la gráfica de f es la recta $y = 5 - x$.

c. Para $-5 \le x \le 5$ si hacemos $f(x) = y$ nos queda $y = \sqrt{25 - x^2}$.
Elevando al cuadrado esta igualdad obtenemos

$$y^2 = 25 - x^2 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 25 \;\Rightarrow\; (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

que representa a la circunferencia con centro en el origen y radio 5.

Luego, $y = \sqrt{25 - x^2}$ representa la semicircunferencia superior y la gráfica nos queda de la forma siguiente:



Nótese que para $x < -5$, la gráfica es parte de la recta $y = x + 5$, de pendiente 1 y ordenada en el origen 5. Y que para $x > 5$ la gráfica es parte de la recta $y = -x + 5$, de pendiente -1 y ordenada en el origen también 5.

Ahora observamos que $R_f = (-\infty, 5]$, que las raíces son $x = \pm 5$ y que la función es par pues su gráfica es simétrica con respecto al eje de las y.

□

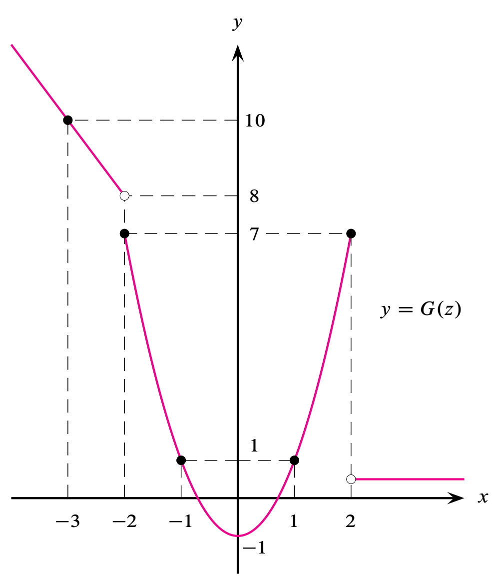
11. Graficar la siguiente función

$$G(z) = \begin{cases} -2z + 4 & \text{si } z < -2; \\ 2z^2 - 1 & \text{si } -2 \le z \le 2; \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } z > 2. \end{cases}$$

▼ Tabulando:

$$G(-3) = 10, \quad G(-2^-) = 8, G(-2) = 7, \quad G(-1) = 1,$$
$$G(0) = -1, \quad G(1) = 1, G(2) = 7 \ \& \quad G(2^+) = \frac{1}{2}.$$

La gráfica de la función G es:



□

12. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 3 & \text{si } x \in (-\infty, 0]\,; \\ -2x + 3 & \text{si } x \in [3, +\infty)\,. \end{cases}$$

Obtener dominio, raíces, gráfica y rango de dicha función.

▼ Primero el dominio: $D_f = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$;

$$2x^2 + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+24}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4} \approx \begin{cases} 0.6861407; \\ -2.1861407; \end{cases}$$

pero $\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4} > 0$; por lo tanto no es raíz de f a diferencia de $x = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{4} < 0$ que sí lo es.

Por otra parte $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$, pero $\dfrac{3}{2} < 3$, luego, $x = \dfrac{3}{2}$ tampoco es raíz por lo que la única raíz es $x = \dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}$.

Como

$$2x^2 + 3x - 3 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x\right) - 3 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) - 3 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - 3 - \frac{9}{8} =$$
$$= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{33}{8},$$

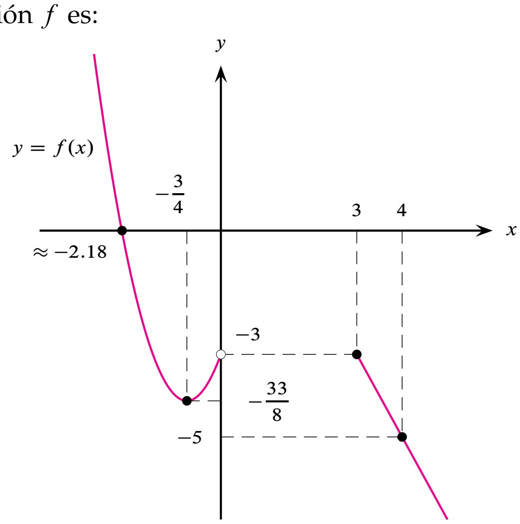
la gráfica de $y = 2x^2 + 3x - 3$ es una parábola de vértice en $\left(-\dfrac{3}{4}, -\dfrac{33}{8}\right)$ que se abre hacia arriba.

Además otro de sus puntos es $(0, -3)$.

La gráfica de $y = -2x + 3$ es la recta de pendiente -2 y ordenada en el origen $y = 3$.

Concretamente, dos de sus puntos son $(3, f(3)) = (3, -3)$ y $(4, f(4)) = (4, -5)$.

Luego, la gráfica de la función f es:



Rango: $R_f = \mathbb{R}$.

□

13. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x < -1\,; \\ 4 & \text{si } |\,x\,| < 1\,; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } 1 \le x \le 4\,. \end{cases}$$

a. Proporcionar el dominio y raíces de f.

b. Hacer un bosquejo gráfico y hallar el rango.

▼

a. Dominio: $D_f = [-3, 4] - \{-1\}$.

Para $-3 \le x < -1$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$.

La gráfica de $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ es una parábola con eje vertical que se abre hacia abajo.

Además

$$y = -x^2 - 2x + 3 = -x^2 - 2x - 1 + 1 + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -(x+1)^2 + 4$$

tiene vértice en el punto $V(-1, 4)$ y raíces en

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \text{ o bien } x = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Pero $x = 1$ no es raíz ya que $1 \notin [-3, -1)$.

Para $-1 < x < 1$ se tiene que $f(x) = 4$.

La gráfica es pues el segmento de recta horizontal que va del punto $(-1, 4)$ al punto $(1, 4)$ sin incluirlos. (Nótese que $|\,x\,| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.)

Para $1 \le x \le 4$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

En este caso su gráfica es una parábola con eje vertical que se abre hacia arriba.

Además

$$y = x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4$$

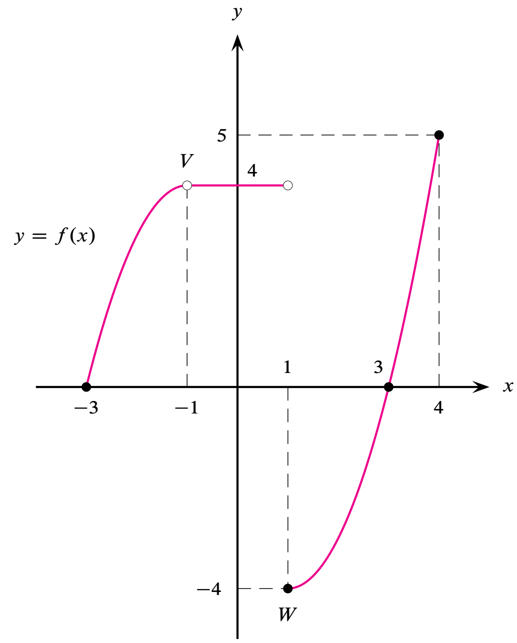
tiene vértice en el punto $W(1, -4)$ y raíces en

$$(x-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x-1) - 2][(x-1) + 2] = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0; \text{ por lo cual}$$
$$x = 3 \text{ y también } x = -1.$$

Pero $x = -1$ no es raíz, pues $-1 \notin [1, 4]$. Entonces las raíces son: $x = -3$ & $x = 3$.

b. Tabulamos $f(4) = 4^2 - (2 \times 4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$.

La gráfica que corresponde a f con todas esas características es:



El rango de la función f es: $R_f = [-4, 5]$.

□

14. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{si } -2 \leq x < 0\,; \\ 3 & \text{si } 0 \leq x < 2\,; \\ -3x + 1 & \text{si } 2 \leq x \leq 4\,. \end{cases}$$

a. Proporcionar el dominio de la función, sus raíces y su paridad.
b. Hacer un bosquejo de la gráfica y hallar el rango.

▼

a. El dominio de la función f es:

$$D_f = [-2, 0) \cup [0, 2) \cup [2, 4] = [-2, 4]\,.$$

Raíces:
Para $x \in [-2, 0)$, $f(x) = 2x^2 + x - 1$ es una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola vertical que se abre hacia arriba a partir de su vértice $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{9}{8}\right)$ y cuya abscisa se encuentra en el intervalo $[-2, 0)$. Esto es claro ya que

$$2x^2 + x - 1 = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\right) - 1 - \frac{1}{8} = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}.$$

Las raíces de esta parábola cumplen

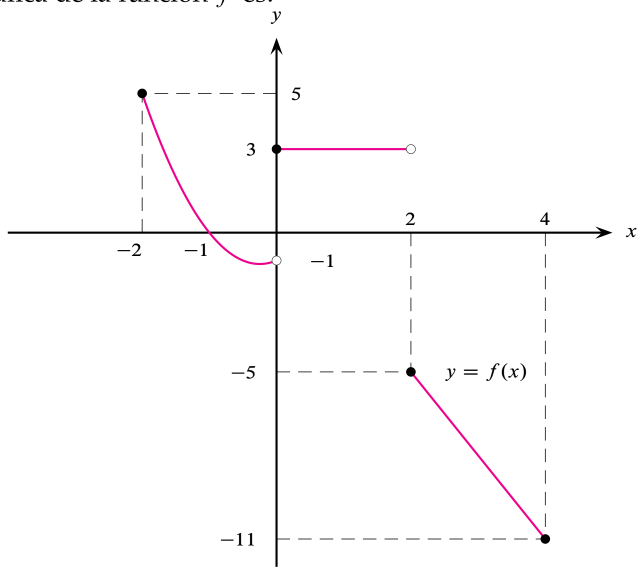
$$2x^2 + x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}, \text{ de donde}$$
$$x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \;\&\; x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1;$$

pero $x_1 = \dfrac{1}{2}$ no está en el intervalo $[-2, 0)$.

Para $x \in [0, 2)$, $f(x) = 3$ es una función constante cuya gráfica es un segmento de la recta horizontal $y = 3$.

Para $x \in [2, 4]$, $f(x) = -3x + 1$ es una función lineal cuya gráfica es un segmento de la recta $y = -3x + 1$, limitado por los puntos $(2, -5)$ y $(4, -11)$.
Paridad:
La función f no es par, ni impar.

b. Un bosquejo de la gráfica de la función f es:



El rango de la función f es: $R_f = [-11, -5] \cup \left(-\dfrac{9}{8}, 5\right]$.

□

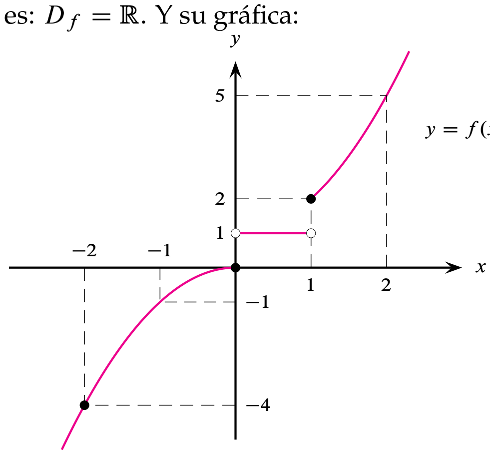
15. Hallar el dominio, graficar y determinar el rango de las funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 0\,; \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 \le x\,. \end{cases}$

b. $g(x) = \dfrac{2x}{|\,x\,| + 2x}$.

▼

a. El dominio de la función f es: $D_f = \mathbb{R}$. Y su gráfica:



El rango de la función f es: $R_f = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, +\infty)$.

b. Tenemos

$$|x| + 2x = \begin{cases} x + 2x & \text{si } x \ge 0 \\ -x + 2x & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & \text{si } x \ge 0; \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

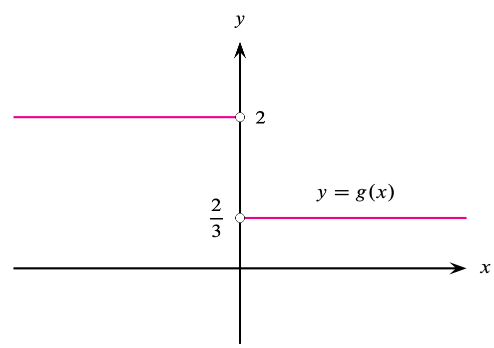
Luego, $|x| + 2x = 0$ únicamente si $x = 0$ por lo cual el dominio de la función g es:

$$D_g = \mathbb{R} - \{0\}.$$

También

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{3x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{2x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} & \text{si } x > 0; \\ 2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cuya gráfica es:



El rango de la función g es: $R_g = \left\{\dfrac{2}{3}, 2\right\}$.

□

16. Determinar dominio, raíces, un esbozo de la gráfica de la siguiente función y su rango.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x + 3| & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

▼ Si $x > -3$, entonces $x + 3 > 0$, por lo que $|x + 3| = x + 3$, entonces:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x + 3) & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \ge 1; \end{cases}$$

simplificando:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 < x < 1; \\ 1 + 2x - x^2 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

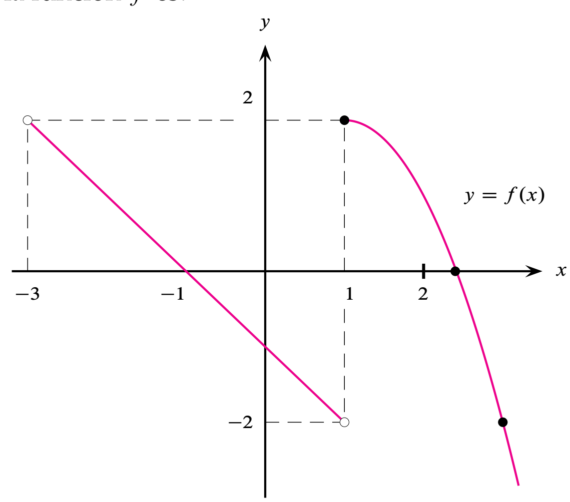
Su dominio: $D_f = (-3, +\infty)$.
Raíces: como $-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ es una raíz de f y como

$$1 + 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{-2} = 1 \mp \frac{2\sqrt{2}}{2} = 1 \mp \sqrt{2},$$

las raíces de f son $x = -1$ & $x = 1 + \sqrt{2}$. El número $x = 1 - \sqrt{2}$ no es raíz ya que no está en el intervalo $[1, +\infty)$.

Puesto que $-x^2 + 2x + 1 = -(x^2 - 2x + 1) + 2 = -(x-1)^2 + 2 \Rightarrow y = -x^2 + 2x + 1$, es una parábola de vértice $(1, 2)$ que se abre hacia abajo.

Un esbozo de la gráfica de la función f es:



El rango de f es: $\mathbb{R}_f = (-\infty, 2]$. □

17. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -3\,; \\ \left| x^2 + x - 2 \right| & \text{si } -3 \le x \le 1\,; \\ 1 - x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

a. Trace su gráfica.
b. Determine su dominio, rango y raíces.

▼

a. Para $x < -3$, la gráfica de f es una parte de la recta horizontal $y = 4$.
Y para $x > 1$, la gráfica de f es parte de la recta de pendiente -1 y ordenada en el origen 1, que casi llega al punto $(1, 0)$. Otro punto de esta recta es $(2, -1)$.
La parábola

$$y = x^2 + x - 2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

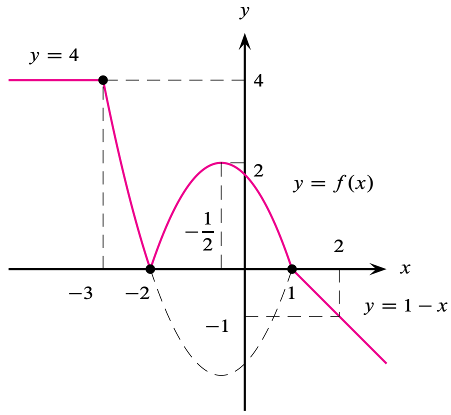
tiene su vértice en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, dirige su concavidad hacia arriba y corta al eje de las x cuando

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1; \\ -2; \end{cases}$$

por eso $x^2 + x - 2 > 0$ si x es menor que -2 o bien mayor que 1.
Entonces en el intervalo $[-3, 1]$ la parábola $y = x^2 + x - 2$ es positiva en $[-3, -2)$ y es negativa en $(-2, 1]$.
Siendo así:

$$f(x) = \left| x^2 + x - 2 \right| = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{si } x \in [-3, -2]\,; \\ -(x^2 + x - 2) & \text{si } x \in (-2, 1]\,. \end{cases}$$

Por lo anterior su gráfica es un segmento de la parábola $y = x^2 + x - 2$ "sobre" $[-3, -2]$ y el reflejo con respecto al eje x de tal parábola en el intervalo $(-2, 1]$.
La gráfica de f es:



b. Dominio: $D_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.
Rango: $R_f = (-\infty, 4]$.
Y raíces: $x = -2$ & $x = 1$.

□

18. Dada la siguiente función

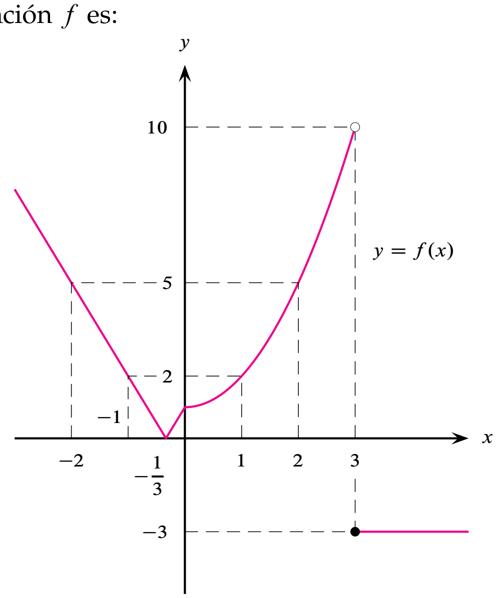
$$f(x) = \begin{cases} |\,3x + 1\,| & \text{si } x \leq 0\,; \\ x^2 + 1 & \text{si } 0 < x < 3\,; \\ -3 & \text{si } x \geq 3\,, \end{cases}$$

obtener la gráfica de f, su dominio, su rango y sus raíces.

▼ Notemos primero que $3x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -\dfrac{1}{3}$; entonces,

$$|\,3x + 1\,| = \begin{cases} -3x - 1 & \text{si } x < -\dfrac{1}{3}; \\ 3x + 1 & \text{si } -\dfrac{1}{3} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Siendo así, la gráfica de la función f es:



Para esta gráfica hemos tabulado los valores: $f(-2) = 5$; $f(-1) = 2$; $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$;
$f(0) = 1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 5$ & $f(3^-) = 10$.

Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Rango: $R_f = \{-3\} \cup [0, +\infty)$.

Y la única raíz es $x = -\frac{1}{3}$.

□

19. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x + 7 & \text{si } x < -5\,; \\ 2 & \text{si } -5 \le x < -3\,; \\ |\,4 - x^2\,| & \text{si } -3 \le x \le 3\,; \\ 2 & \text{si } 3 < x < 6\,; \\ \dfrac{-x}{6} + \dfrac{7}{6} & \text{si } x \ge 6\,. \end{cases}$$

Determine:

a. Gráfica y rango de f.

b. ¿Es par o impar f? Justifique su respuesta.

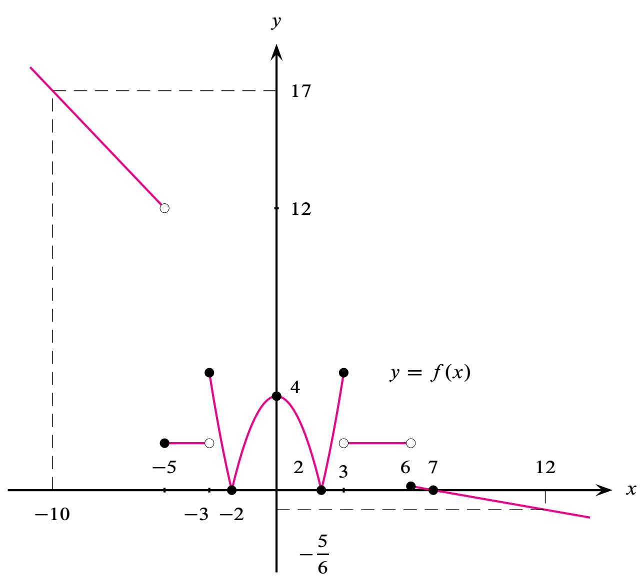
▼

a. Calculamos $f(-10) = 17$, $f(-5^-) = 12$, $f(5^+) = 2$, $f(-3^-) = 2$, $f(-3^+) = 5$, $f(-2) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3^-) = 5$, $f(3^+) = 2$, $f(6^-) = 2$, $f(6^+) = \frac{1}{6}$ & $f(12) = -\frac{5}{6}$.

Y observamos que

$$|\,4 - x^2\,| = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } 4 - x^2 \ge 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \le 4 \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| \le 2 \;\Leftrightarrow\; -2 \le x \le 2; \\ x^2 - 4 & \text{si } 4 - x^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 > 4 \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| > 2 \;\Leftrightarrow\; x > 2 \text{ o bien } x < -2. \end{cases}$$

Por lo tanto, la gráfica de f es:



El rango es: $R_f = (-\infty, 5] \cup (12, +\infty)$.

b. En la gráfica se ve que la función no es par ni impar, porque no es simétrica ni con respecto al eje de las y ni con respecto al origen.
Por ejemplo, vemos que $f(6) \neq f(-6)$.

□

20. Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1; \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1; \\ |\,x - 3\,| & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

▼ La gráfica de $y = 2x + 3$ es la recta de pendiente 2 y ordenada en el origen 3.

Como

$$y = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1,$$

los puntos que satisfacen $y = \sqrt{1 - x^2}$ están sobre la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Y como $y \geq 0$, se trata de la semicircunferencia superior.

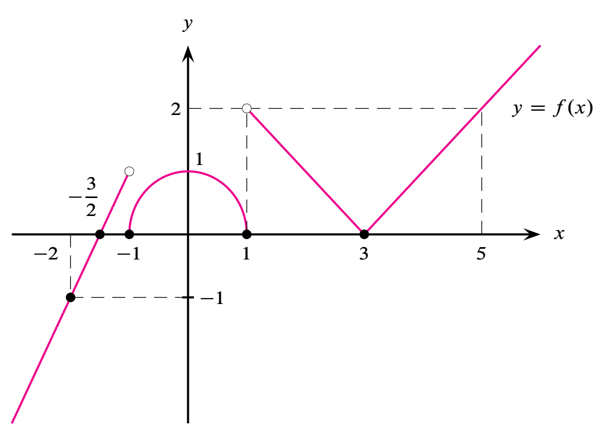
La gráfica de $y = |\,x - 3\,|$ se obtiene a partir de la definición de valor absoluto:

$$|\,x - 3\,| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3; \\ 3 - x & \text{si } x < 3. \end{cases}$$

Tabulamos

$$f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1 \;\&\; 2x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{2};$$
$$f(-1^-) = 2(-1^-) + 3 = -2^- + 3 = 1^-.$$

En resumen la gráfica de f es:



□

21. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1; \\ \dfrac{|\,x\,|}{x} & \text{si } -1 \leq x < 2 \;\&\; x \neq 0; \\ 4 & \text{si } x = 2; \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

▼ Para $x < -1$, la gráfica de f es un segmento de la recta $y = 2x + 3$. Dos puntos de ella son $(-2, -1)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Para $-1 \leq x < 0$, $|x| = -x$ & $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$, por lo cual la gráfica de f es un segmento de la recta $y = -1$.

Para $0 < x < 2$, $|x| = x$ & $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$, por lo cual la gráfica de f es un segmento de la recta $y = 1$.

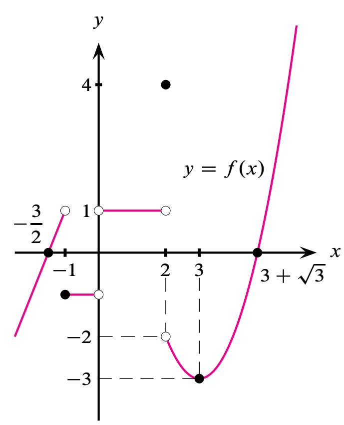
Para $x = 2$, la gráfica es el punto $(2, 4)$.

Para $x > 2$, la gráfica de f es una porción de la parábola de eje vertical

$$y = x^2 - 6x + 6 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 6 = (x - 3)^2 - 3,$$

que se abre hacia arriba a partir de su vértice $V(3, -3)$. Su raíz es $x = 3 + \sqrt{3}$ y la parábola está limitada por el punto $(2, -2)$.

Un bosquejo de la gráfica de f es el siguiente:



□

22. Obtener dominio y gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 1 & \text{si } x \leq 0\,; \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1\,; \\ 3x - 3 & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases}$$

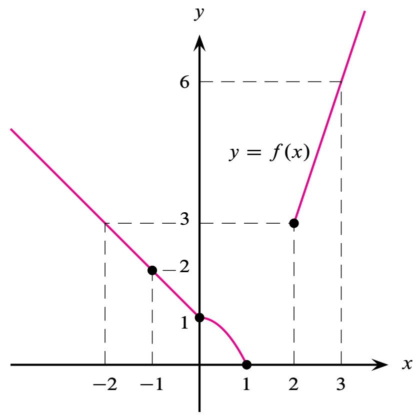
▼ Dominio: $D_f = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$.

Observamos que $f(x) = -x + 1$ si $x \leq 0$, por lo que la gráfica es un segmento de la recta de pendiente -1 y ordenada en el origen 1.

Tabulamos:

$$f(-2) = 3,\ f(-1) = 2,\ f(0) = 1,\ f(1) = 0,\ f(2) = 3,\ f(3) = 6 \ \&\ f(5) = 12.$$

La gráfica de la función f es:



□

23. Considere las funciones

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,; \\ 1 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

así como

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0\,; \\ 0 & \text{si } x = 0\,; \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

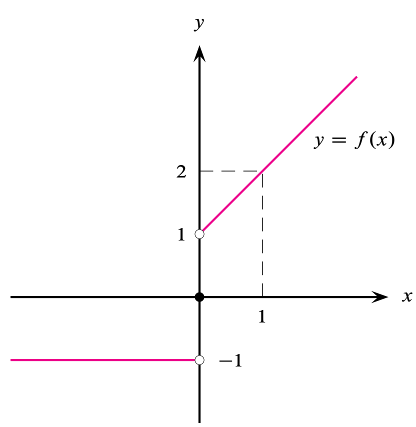
Obtener el dominio, la gráfica y el rango de la función definida por

$$f(x) = sgn(x) + xU(x).$$

▼ Dominio: $D_{sgn} = D_U = \mathbb{R}$, por lo tanto $D_f = \mathbb{R}$;

$$f(x) = \begin{cases} -1 + x \times 0 & \text{si } x < 0; \\ 0 + 0 \times 1 & \text{si } x = 0; \\ 1 + x \times 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ 1 + x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Y la gráfica de f es:



El rango de f es: $R_f = \{-1, 0\} \cup (1, +\infty)$. □

24. Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -10 < x \le 6; \\ x & \text{si } x > 6. \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \le 0; \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Obtenga el dominio y la fórmula de la función $f + g$.

▼ El dominio de f es: $D_f = (-10, +\infty)$.

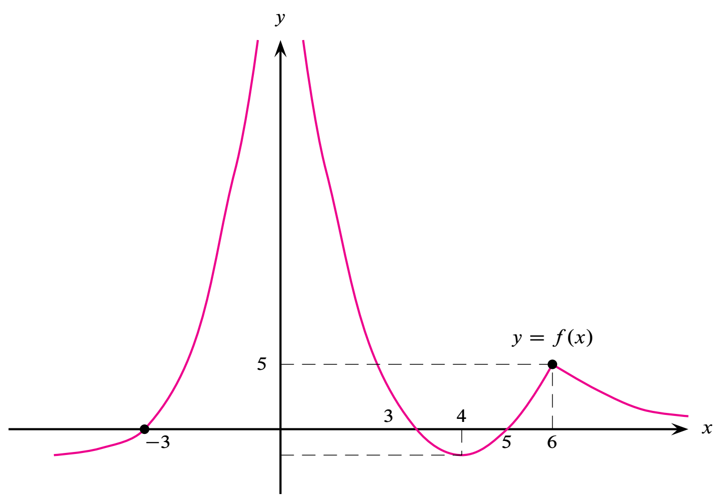
El dominio de g es: $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = D_f \cap D_g = D_f = (-10, +\infty)$, pues $(-10, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

La fórmula de $f + g$ es:

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x^3 + 1 - 2x & \text{si } x \in (-10, 0]\,; \\ x^3 + x^2 & \text{si } x \in (0, 6]\,; \\ x + x^2 & \text{si } x \in (6, +\infty)\,. \end{cases}$$

□

25. A partir de la gráfica de la función f



determine:

a. Los intervalos donde $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$, así como los valores donde $f(x) = 0$, es decir, las raíces de f.

b. Los intervalos de monotonía de f, es decir, dónde es creciente y dónde es decreciente.

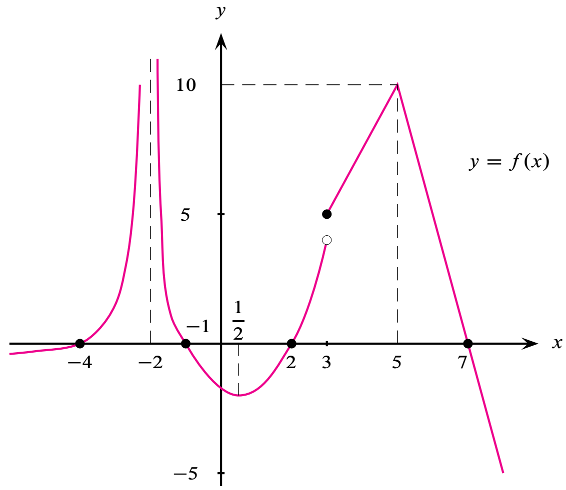
▼

a. $f(x) > 0$ en $(-3, 0) \cup (0, 3) \cup (5, +\infty)$.
   $f(x) < 0$ en $(-\infty, -3) \cup (3, 5)$.
   $f(x) = 0$ en $x = -3$, $x = 3$ & $x = 5$.

b. f es creciente en $(-\infty, 0)$ y en $(4, 6)$.
   f es decreciente en $(0, 4)$ y en $(6, +\infty)$.

□

26. A partir de la gráfica de la función f:



Determinar:

a. Los intervalos donde $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$; y los valores donde $f(x) = 0$.

b. Los intervalos de monotonía de f; es decir dónde es creciente y dónde es decreciente.

▼

a. $f(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, 7)$.
$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, 2) \cup (7, +\infty)$.
$f(x) = 0$ si $x = -4, -1, 2$ & 7.

b. La función f es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

La función f es decreciente en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ y en $(5, +\infty)$.

□

27. Para la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -7 \le x < -2\,; \\ -x^2 + 3 & \text{si } -2 \le x \le 3\,; \\ 4 & \text{si } 3 < x \le 6\,. \end{cases}$$

a. Bosqueje su gráfica.

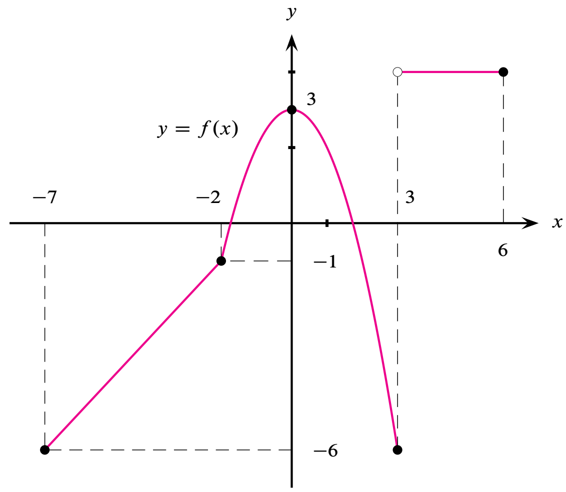
b. Determine su dominio, su rango y sus raíces.

c. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

▼

a. La gráfica de f es:



b. Vemos que:

$$D_f = [-7, 6] \text{ y } R_f = [-6, 3] \cup \{ 4 \} .$$

La función es cero solamente cuando

$$-x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow |\, x \,| = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3},$$

que son sus raíces.

c. En $[-7, 0]$ la función es creciente y en $[0, 3]$ es decreciente.
En $(3, 6]$ es no creciente y no decreciente (es constante).

d. Observamos que

$$f(x) > 0 \text{ si } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (3, 6];$$
$$f(x) < 0 \text{ si } x \in [-7, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3].$$

□

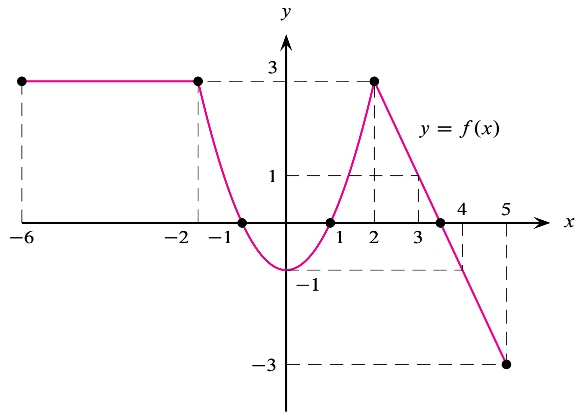
28. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \le x < -2\,; \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 \le x \le 2\,; \\ -2x + 7 & \text{si } 2 < x \le 5\,. \end{cases}$$

a. Bosqueje la gráfica de la función.
b. Determine el dominio y el rango de la función; encuentre también sus raíces.
c. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
d. A partir de la gráfica, encuentre los intervalos en donde la función es positiva y negativa.

▼

a. La gráfica es:



b. $D_f = [-6, 5]$, $R_f = [-3, 3]$.

Raíces: $x = -1$, $x = 1$ & $x = \dfrac{7}{2}$.

Las dos primeras raíces se obtienen al resolver $x^2 - 1 = 0$ y la última se obtiene al igualar a cero $-2x + 7$ de donde $x = \dfrac{7}{2} \in (2, 5]$.

c. f crece en $(0, 2)$ y decrece en $(-2, 0)$ y en $(2, 5]$.

d. $f(x) > 0$ si $x \in [-6, -1) \cup \left(1, \dfrac{7}{2}\right)$.

$f(x) < 0$ si $x \in (-1, 1) \cup \left(\dfrac{7}{2}, 5\right]$.

□

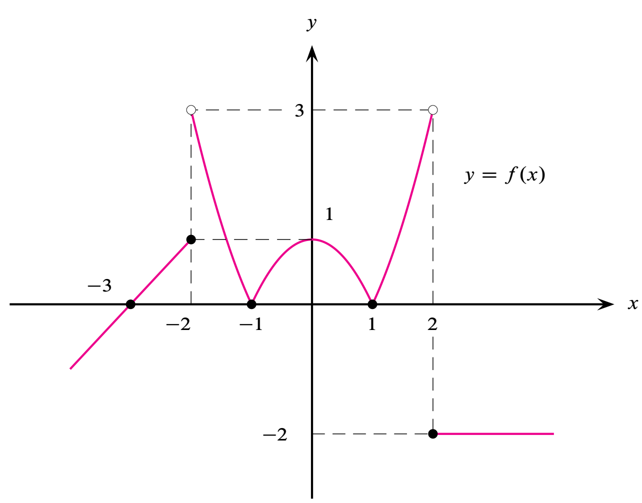
29. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq -2\,; \\ |\,x^2 - 1\,| & \text{si } x \in (-2, 2)\,; \\ -2 & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases}$$

Bosquejar su gráfica.

Obtener el dominio, raíces y especificar los intervalos donde: a. $f(x) > 0$; b. $f(x) < 0$; c. $f(x)$ crece; d. $f(x)$ decrece.

▼ La gráfica de f es:



El dominio: $D_f = \mathbb{R}$.

Las raíces: $\{-3, -1, 1\}$.

a. $f(x) > 0$ si $x \in (-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$;
b. $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -3) \cup [2, \infty)$;
c. $f(x)$ crece en $(-\infty, -2)$, en $(-1, 0)$ y en $(1, 2)$;
d. $f(x)$ decrece en $(-2, -1)$ y en $(0, 1)$.

□

30. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \le 0\,; \\ |\,x - 2\,| & \text{si } 0 < x < 4\,; \\ 3 & \text{si } x \ge 4\,. \end{cases}$$

a. Grafique la función.
b. ¿Cuáles son el rango y las raíces de f?
c. ¿Cuáles son los intervalos de monotonía de f?
d. ¿La función f es par o impar? Justifique su respuesta.

▼

a. Como

$$-x^2 - 2x + 2 = -(x^2 + 2x + 1) + 2 + 1 = -(x + 1)^2 + 3$$

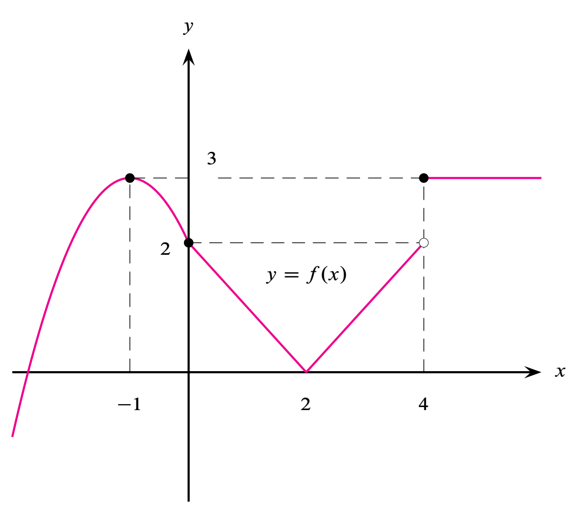
resulta que $y = -x^2 - 2x + 2$ es una parábola cuyo vértice es $(-1, 3)$ y se abre hacia abajo, por lo que para $x \le 0$, la gráfica de f es un segmento de tal parábola.

Entre $x = 0$ & $x = 4$ la gráfica de f es igual a la de $|\,x - 2\,|$. Aplicando la definición de valor absoluto:

$$|\,x - 2\,| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \ge 0 \\ -(x - 2) & \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \ge 2; \\ 2 - x & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Por último, si $x \ge 4$, la gráfica es una recta paralela al eje de las x trazada a una altura de 3.

Por lo tanto la gráfica es:



b. $R_f = (-\infty, 3]$.

Para hallar las raíces no positivas resolvamos la ecuación

$$-x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ o } x^2 + 2x - 2 = 0$$

con lo que obtenemos

$$x = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

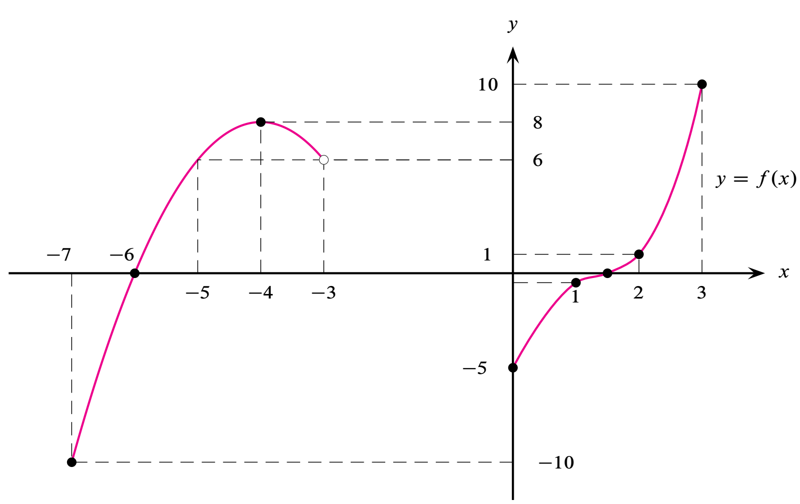
Luego, $x = -1 - \sqrt{3}$ es la única raíz negativa que tiene la función.
La única raíz positiva es $x = 2$; sus raíces son $x = -1 - \sqrt{3}$ & $x = 2$.

c. La función f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (2, 4)$.
La función f es decreciente en $(-1, 2)$.
La función f es no creciente y no decreciente en $[4, +\infty)$.

d. La función f no es par pues, por ejemplo, $f(-1) = 3 \neq 1 = f(1)$.
Y tampoco es impar pues $f(-1) = 3 \neq -1 = -f(1)$.

□

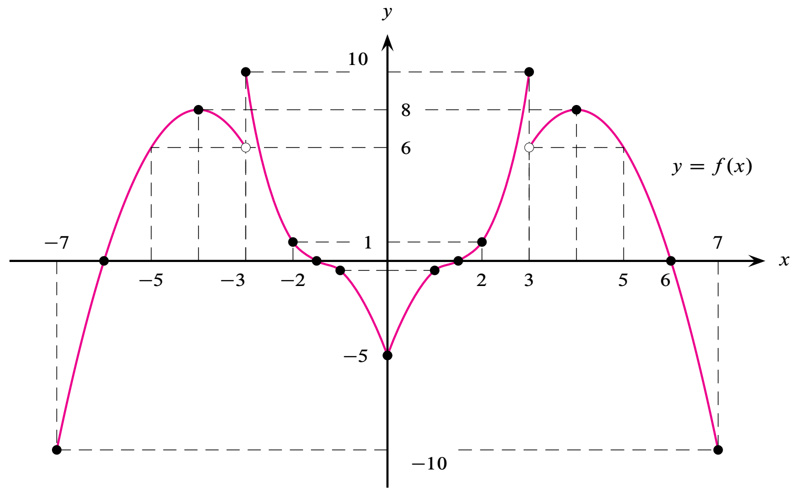
31. En el dibujo aparece una parte de la gráfica de la función f.



a. Complete esta gráfica sabiendo que se trata de una función par y también determine su dominio, raíces y rango (imagen).
b. Determine las soluciones de las desigualdades $f(x) > 0$ & $f(x) < 0$.
c. Determine los intervalos donde esta función f es
   i. creciente;
   ii. decreciente.

▼

a. La gráfica completa es:



Y así resulta que $D_f = [-7, 7]$.

Raíces: $\left\{-6, -\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, 6\right\}$.

$R_f = [-10, 10]$.

b. $f(x) > 0$ si $x \in \left(-6, -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, 6\right)$;

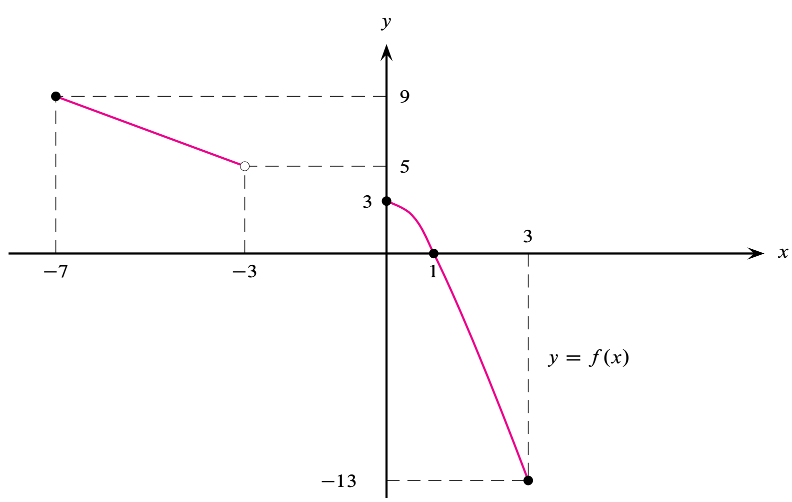
$f(x) < 0$ si $x \in [-7, -6) \cup \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \cup (6, 7]$.

c. i. La función f es creciente en $(-7, -4)$, $(0, 3)$ y en $(3, 4)$;

ii. La función f es decreciente en $(-4, -3)$, $(-3, 0)$ y en $(4, 7)$.

□

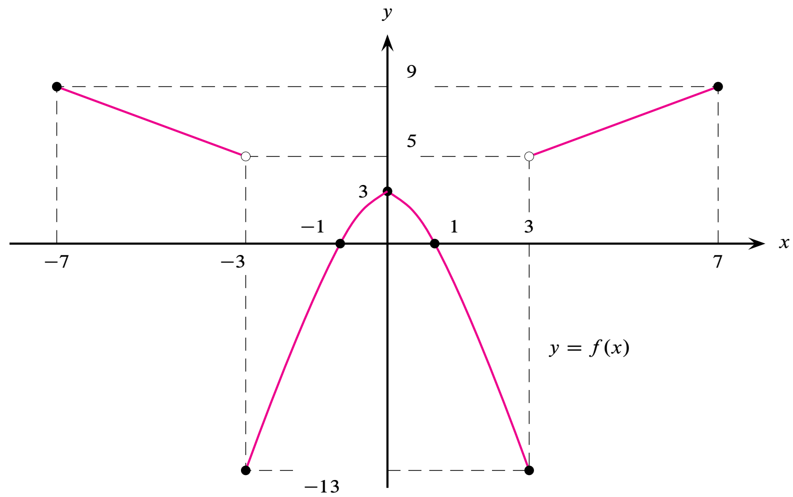
32. La siguiente figura es parte de la gráfica de una función f:



a. Completar la gráfica sabiendo que es una función par.
b. Determinar dominio, raíces y rango.
c. Determinar los intervalos de monotonía.

▼

a. La gráfica completa de f es:



b. Dominio de f: $D_f = [-7, 7]$.
Raíces: $\{-1, 1\}$.
Rango de f: $R_f = [-13, 3] \cup (5, 9]$.

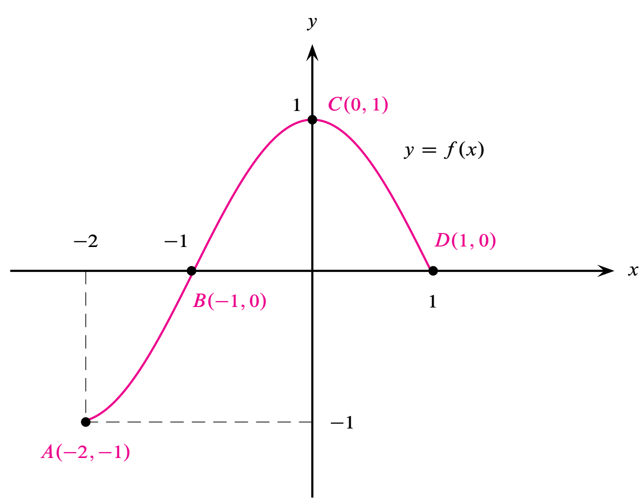
c. La función decrece en $[-7, -3]$ y en $(0, 3]$.
La función crece en $[-3, 0)$ y en $[3, 7]$.

□

2.7 Transformaciones de funciones

Ejercicios 2.7.1

1. Considerando la siguiente figura como la gráfica de cierta función f,



realizar un bosquejo de la gráfica de la función

$$g(x) = -2f(x-1) + 3$$

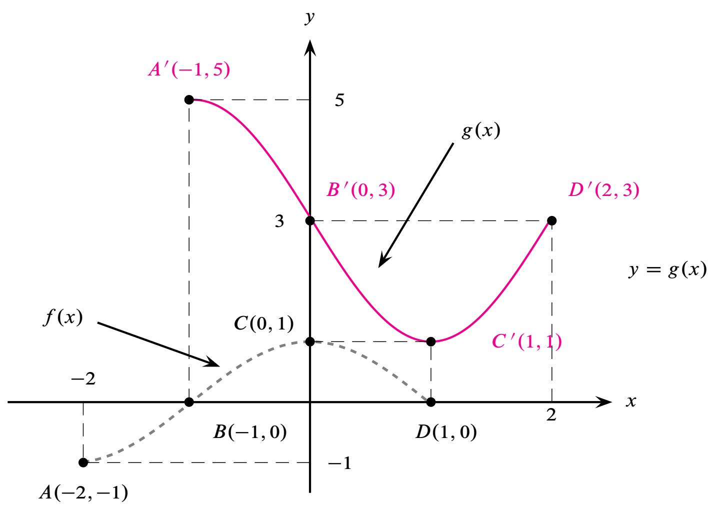
y especificar la nueva posición de los puntos $A(-2, -1)$; $B(-1, 0)$; $C(0, 1)$ & $D(1, 0)$.

▼ La gráfica de $y = g(x)$ se obtiene a partir de $y = f(x)$, mediante los pasos siguientes:
Se obtiene $y = f(x-1)$ trasladando 1 unidad hacia la derecha la curva $y = f(x)$.
Se obtiene $y = 2f(x-1)$ multiplicando por 2 las ordenadas de los puntos de $y = f(x-1)$.

Se obtiene $y = -2f(x-1)$ reflejando la curva $y = 2f(x-1)$ con respecto al eje x.

Se obtiene $y = -2f(x-1) + 3$ trasladando 3 unidades hacia arriba la curva $y = -2f(x-1)$.

Obtenemos la gráfica de $g(x) = -2f(x-1) + 3$:



En efecto como

$$f(-2) = -1, \quad f(-1) = 0, \quad f(0) = 1 \; \& \; f(1) = 0,$$

encontramos

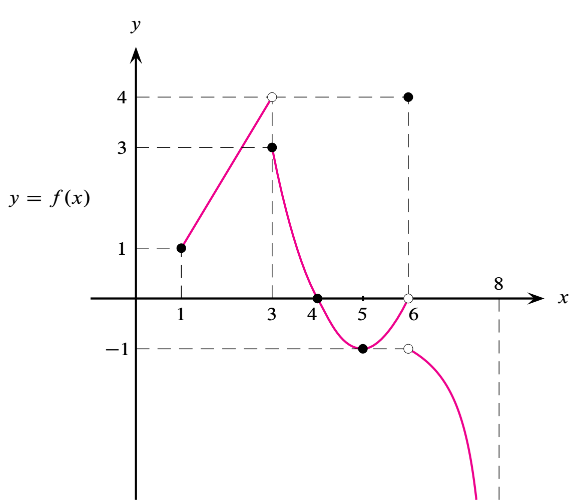
$$g(-1) = 5, \quad g(0) = 3, \quad g(1) = 1 \; \& \; g(2) = 3.$$

Veamos la nueva posición de los puntos A, B, C y D respectivamente:

$$A'(-1, 5); \; B'(0, 3); \; C'(1, 1) \text{ y } D'(2, 3).$$

□

2. Considerando que la figura siguiente es un bosquejo de la gráfica de cierta función f, obtenga el dominio, el rango, las raíces así como un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = -3f(x+5)+2$.



▼ $D_f = [1, 8)$, $R_f = (-\infty, 4]$, raíz $x = 4$.

Para graficar $y = g(x)$ tenemos que trasladar la gráfica de $y = f(x)$ 5 unidades a la izquierda, expandirla verticalmente 3 unidades, reflejarla con respecto al eje de las x y por último deslizarla hacia arriba 2 unidades.

Como $D_g = [-4, 3)$ e, igualmente, como

$$g(-4) = -3 \times f(1) + 2 = -3 \times 1 + 2 = -3 + 2 = -1;$$

$$g(-2) = -3 \times f(3^{\mp}) + 2 = -3 \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases} + 2 = \begin{cases} -12 \\ -9 \end{cases} + 2 = \begin{cases} -10; \\ -7; \end{cases}$$

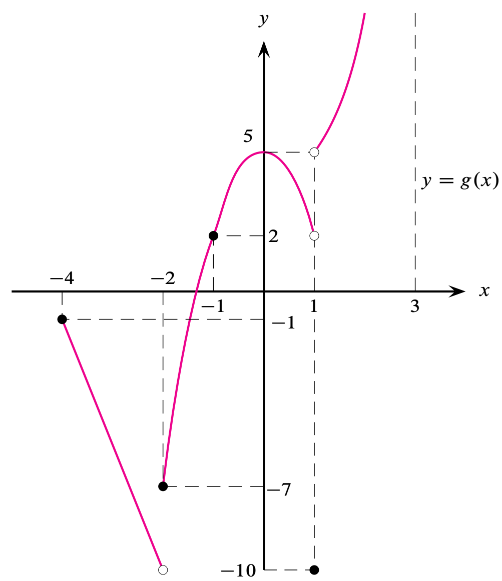
$$g(-1) = -3 \times f(4) + 2 = -3 \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2;$$

$$g(0) = -3 \times f(5) + 2 = -3(-1) + 2 = 3 + 2 = 5;$$

$$g(1) = -3 \times f(6^{\mp}) + 2 = -3 \begin{cases} 0 \\ 4 \\ -1 \end{cases} + 2 = \begin{cases} 0 \\ -12 \\ 3 \end{cases} + 2 = \begin{cases} l2; \\ -10; \\ 5; \end{cases} \quad \text{y como}$$

$$g(3^-) = -3 \times f(8^-) + 2 = -3 \times \text{``}(-\infty)\text{''} + 2 = \text{``}(+\infty)\text{''} + 2 = \text{``}(+\infty)\text{''},$$

encontramos que la gráfica de g es:



□

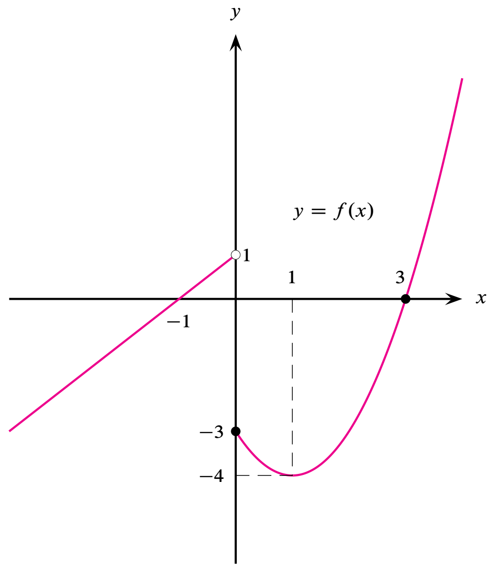
3. Considerando la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0\,; \\ x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \geq 0\,. \end{cases}$$

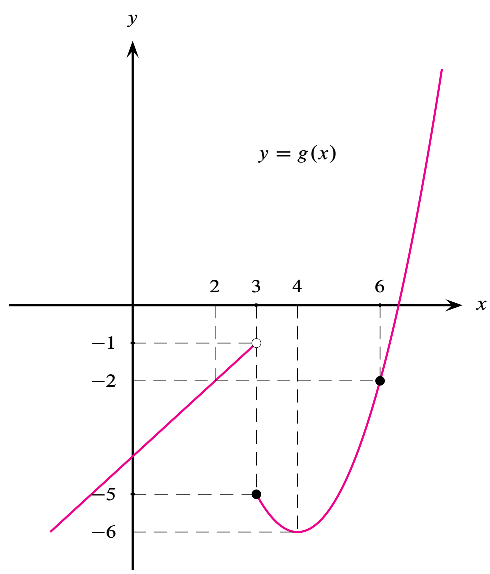
a. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función f.
b. Realizar un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = f(x - 3) - 2$.
c. Obtener dominio, rango y raíces de la función g.

▼

a. A la izquierda de $x = 0$, la gráfica coincide con la de la recta $y = x + 1$; a partir de $x = 0$, con la de la parábola $y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$ cuyo vértice es $(1, -4)$, que pasa por los puntos $(0, -3)$ y $(3, 0)$.
La gráfica de f es:



b. Trasladamos primero la gráfica de f horizontalmente hacia la derecha 3 unidades y después verticalmente hacia abajo 2 unidades.
La gráfica de g es:



Observación: $f(-1) = 0,\quad f(0^-) = 1,\quad f(0) = -3,\quad f(1) = -4$ & $f(3) = 0$.
Por lo que
$g(2) = -2,\quad g(3^-) = -1,\quad g(3) = -5,\quad g(4) = -6$ & $g(6) = -2$.

c. Dominio: todos los números reales.
Rango: todos los números reales.
Raíces: la función g es:

$$g(x) = \begin{cases} [(x-3)+1]-2 & \text{si } x < 3; \\ \left[(x-3)^2 - 2(x-3) - 3\right] - 2 & \text{si } x \geq 3; \end{cases}$$

o sea,

$$g(x) = \begin{cases} x-4 & \text{si } x < 3; \\ x^2 - 8x + 10 & \text{si } x \geq 3; \end{cases}$$

La función $g(x) = x - 4$ no tiene raíces para $x < 3$.

La función $g(x) = x^2 - 8x + 10$ tiene una raíz para $x \geq 3$, que es $x = 4 + \sqrt{6}$.
En efecto $g(4 + \sqrt{6}) = (4 + \sqrt{6})^2 - 8(4 + \sqrt{6}) + 10 = 16 + 8\sqrt{6} + 6 - 32 - 8\sqrt{6} + 10 = 0$.

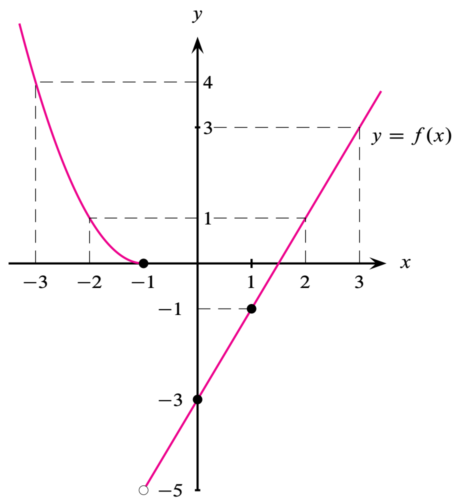
□

4. Dada

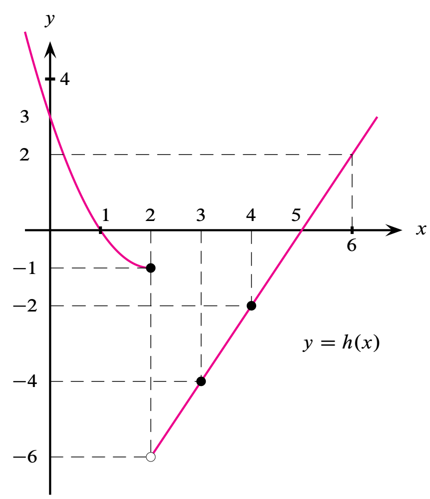
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq -1\,; \\ 2x - 3 & \text{si } x > -1\,. \end{cases}$$

Obtenga la gráfica de $h(x) = f(x - 3) - 1$.

▼ Grafiquemos primero f, observando que $f(x) = (x + 1)^2$ si ≤ -1.



Se obtendrá $y = h(x)$ trasladando la gráfica de $y = f(x)$ 3 unidades a la derecha y deslizándola una unidad hacia abajo:



Observación, como

$$f(-3) = 4,\ f(-2) = 1,\ f(-1^-) = 0,\ f(-1^+) = -5,\ f(0) = -3,\ f(1) = -1,\ f(2) = 1\ \&\ f(3) = 3,$$

se tiene que

$$h(0) = 3, h(1) = 0, h(2^-) = -1, h(2^+) = -6, h(3) = -4, h(4) = -2, h(5) = 0\ \&\ h(6) = 2.$$

□

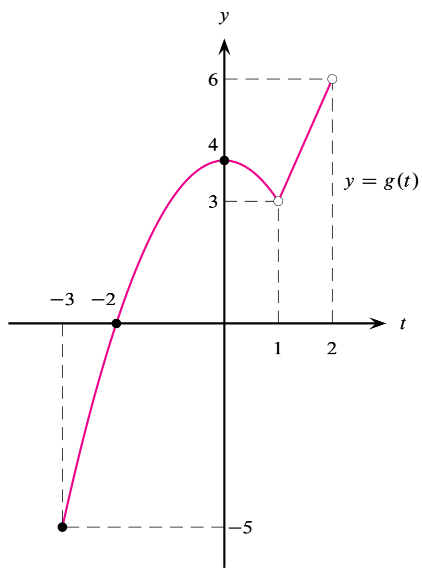
5. Dada la función

$$g(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{si } -3 \le t < 1\,; \\ 3t & \text{si } 1 < t < 2\,. \end{cases}$$

a. Bosquejar su gráfica y determinar dominio, rango y raíces.
b. Obtener los intervalos en los que $g(t) \ge 0$ así como aquellos en donde $g(t) < 0$.
c. A partir de la gráfica obtenida, bosquejar la gráfica de $f(t) = 2g(t+2) - 3$.

▼

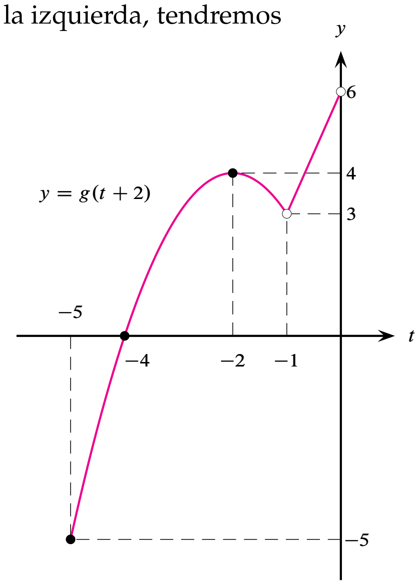
a. La gráfica de la función g es:



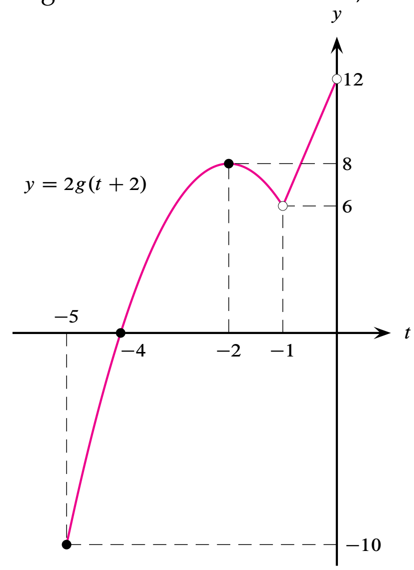
Dominio: $D_g = [-3, 2) - \{1\} = [-3, 1) \cup (1, 2)$.
Rango: $R_g = [-5, 6)$.
Raíz: $t = -2$.

b. $g(t) \ge 0$ si $t \in [-2, 2) - \{1\} = [-2, 1) \cup (1, 2)$;
$g(t) < 0$ si $t \in [-3, -2)$.

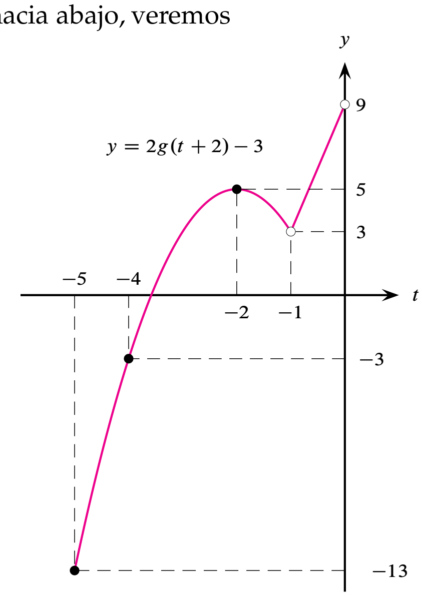
c. La gráfica que deseamos se obtiene de la original.
   i. Al desplazarla 2 unidades a la izquierda, tendremos



ii. Si expandimos verticalmente la gráfica anterior 2 unidades, obtendremos



iii. Al desplazarla 3 unidades hacia abajo, veremos



□

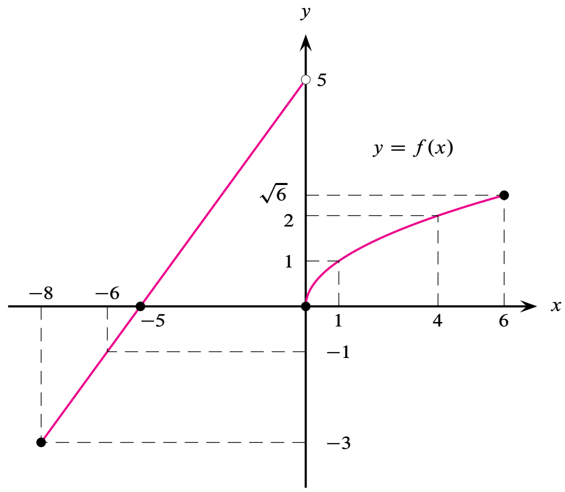
6. Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } -8 \le x < 0\,; \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \le x \le 6\,. \end{cases}$$

a. Determinar dominio, raíces o puntos en donde la función vale cero, gráfica y rango de f.
b. A partir de la gráfica de f, construir la gráfica de $h(x) = 1 - 2f(x + 3)$.

▼

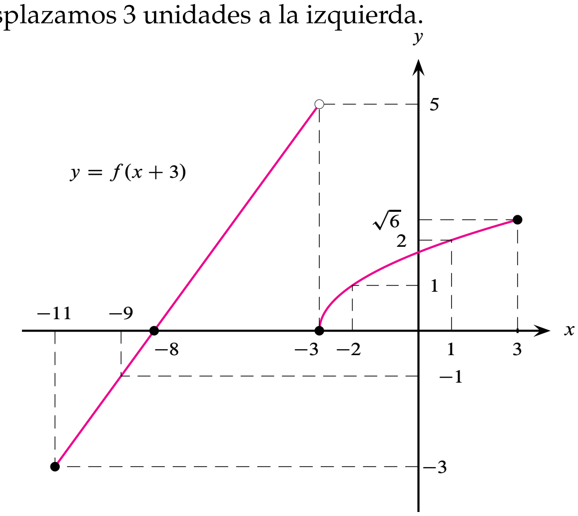
a. $D_f = [-8, 6]$.
Raíces : -5 & 0.
La gráfica de f es:



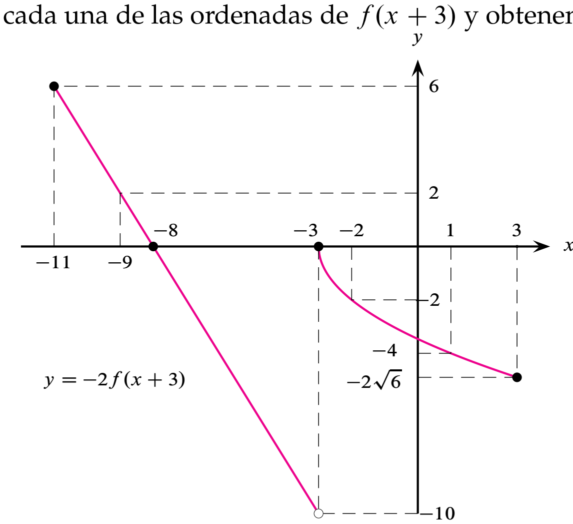
$R_f = [-3, 5)$.

b. Para construir la gráfica de $h(x)$ se realiza lo siguiente:

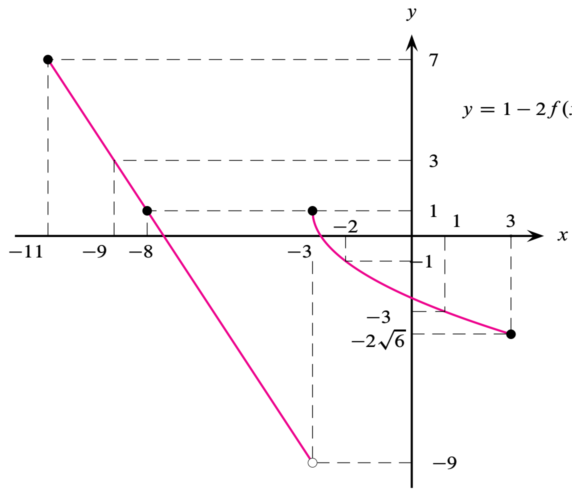
i. La gráfica de f la desplazamos 3 unidades a la izquierda.



ii. Multiplicamos por -2 cada una de las ordenadas de $f(x+3)$ y obtenemos $-2f(x+3)$.



iii. Desplazamos una unidad hacia arriba la gráfica de $-2f(x+3)$ y obtenemos $1 - 2f(x+3)$.



□

7. Considere la función f definida por

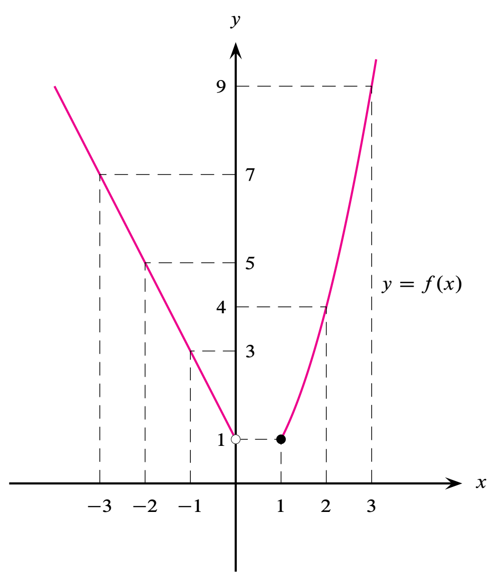
$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 0\,; \\ x^2 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$$

a. Grafique la función f.

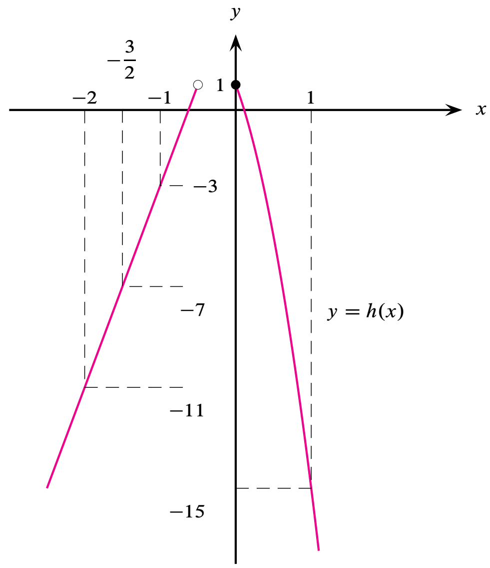
b. Usando la gráfica de f, construir la gráfica de la función $h(x) = 3 - 2f(2x + 1)$ y obtener una expresión o fórmula para $h(x)$.

▼

a. La gráfica de f es:



b. Puesto que $3 - f(2x + 1) = 3 - f\left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$, hay que trasladar $\frac{1}{2}$ unidad hacia la izquierda la gráfica de f, comprimirla horizontalmente por un factor de 2, expandirla verticalmente multiplicando por 2 las ordenadas, reflejarla con respecto al eje x y deslizarla hacia arriba 3 unidades.



En efecto, como $f(x)$ varía dependiendo si $x < 0$ o bien si $x \geq 1$, $f(2x+1)$, cambiará dependiendo si $2x+1 < 0$ o bien si $2x+1 \geq 1$; esto es, si $x < -\frac{1}{2}$ o bien si $x \geq 0$.

Observemos que:

i.

$$x < -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x < -1 \Rightarrow 2x + 1 < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(2x+1) = 1 - 2(2x+1) = 1 - 4x - 2 = -1 - 4x\,;$$
$$h(x) = 3 - 2f(2x+1) = 3 - 2(-1-4x) = 3 + 2 + 8x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(x) = 5 + 8x;$$

ii.

$$x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow 2x + 1 \geq 1 \Rightarrow f(2x+1) = (2x+1)^2\,;$$
$$h(x) = 3 - 2f(2x+1) = 3 - 2[(2x+1)^2] = 3 - 8x^2 - 8x - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(x) = -8x^2 - 8x + 1\,.$$

Por lo tanto:

$$h(x) = \begin{cases} 5 + 8x & \text{si } x < -\frac{1}{2}; \\ -8x^2 - 8x + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

□

8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -6 \leq x < -4\,; \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } -4 \leq x \leq 0\,; \\ 2x - 3 & \text{si } \quad 0 < x < 4\,, \end{cases}$$

determine:

a. Un esbozo gráfico de la función.
b. Dominio, rango, raíces, paridad, intervalos de monotonía e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.
c. Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -f(x-1) + 2$.

▼

a. La gráfica de la función f consta de tres partes:

i. En $[-6,-4)$ es un segmento de recta paralelo al eje x de altura 3.

ii. En $[-4,0]$ es una parábola abierta hacia arriba. Para obtener mayor información completamos el cuadrado:

$$x^2+2x-3=x^2+2x+1-1-3=x^2+2x+1-4=(x+1)^2-4\,.$$

De aquí vemos que es una parábola cuyo vértice es $(-1,-4)$ y que se obtiene de la canónica x^2 desplazándola a la izquierda 1 unidad y hacia abajo 4 unidades.
Otra información útil son los ceros de la cuadrática:

$$\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}1\\-3\,.\end{cases}$$

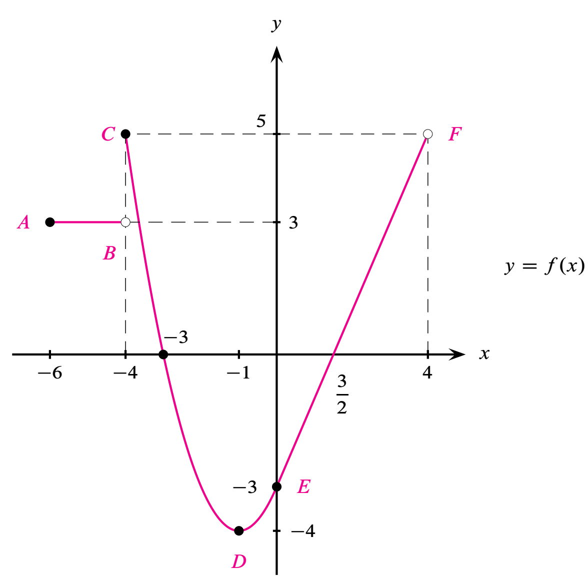
Desechamos 1 ya que no se encuentra dentro del intervalo considerado.
Vamos a evaluar la función en los extremos del intervalo:

x	x^2+2x-3
-4	$16-8-3=5$
0	-3

iii. En $(0,4)$ es un segmento de la recta de pendiente 2 y ordenada en el origen -3.
Esta recta tiene como raíz: $2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}=1.5$, la cual se encuentra dentro del intervalo.
Vamos a evaluar la recta en los extremos del intervalo:

x	$2x-3$
0	-3
4	5

Con la información anterior hacemos el esbozo de la gráfica:



b. Dominio: $D_f=[-6,4)$.
Rango: $R_f=[-4,5]$.

Raíces: $x = -3, x = 1.5$.

No es par ni impar.

La función es constante si $x \in [-6, 4)$. Es decir, la función es nocreciente y nodecreciente en este intervalo.

La función decrece si $x \in (-4, -1)$.

La función crece si $x \in (-1, 4)$.

La función es positiva si $x \in [-6, -3) \cup (1.5, 4)$.

La función es negativa si $x \in (-3, 1.5)$.

c. Cada valor de la nueva gráfica se obtiene de la anterior desplazándola 1 unidad a la derecha, reflejándola con respecto al eje x y subiéndola 2 unidades.

Vamos a obtener los valores de los puntos elegidos:

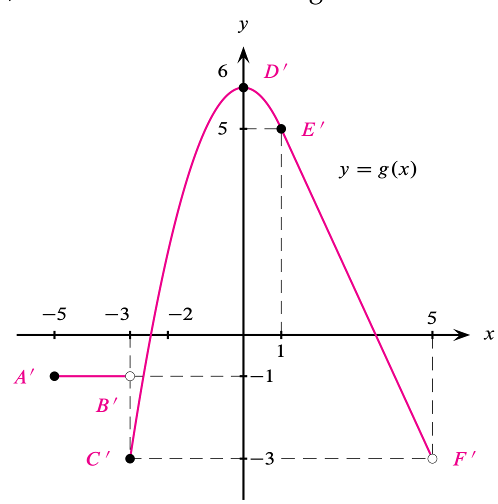
$$
\begin{aligned}
A(-6, 3) &\to (-5, 3) \to (-5, -3) \to A'(-5, -1);\\
B(-4, 3) &\to (-3, 3) \to (-3, -3) \to B'(-3, -1);\\
C(-4, 5) &\to (-3, 5) \to (-3, -5) \to C'(-3, -3);\\
D(-1, -4) &\to (0, -4) \to (0, 4) \to D'(0, 6);\\
E(0, -3) &\to (1, -3) \to (1, 3) \to E'(1, 5);\\
F(4, 5) &\to (5, 5) \to (5, -5) \to F'(5, -3).
\end{aligned}
$$

Esto lo podemos comprobar considerando el dominio de g, $D_g = [-5, 5)$ y evaluando directamente la función g:

$$
\begin{aligned}
g(-5) &= -f(-5-1) + 2 = -f(-6) + 2 = -3 + 2 = -1;\\
g(-3^-) &= -f(-3^- - 1) + 2 = -f(-4^-) + 2 = -3 + 2 = -1;\\
g(-3) &= -f(-3-1) + 2 = -f(-4) + 2 = -5 + 2 = -3;\\
g(0) &= -f(0-1) + 2 = -f(-1) + 2 = 4 + 2 = 6;\\
g(1) &= -f(1-1) + 2 = -f(0) + 2 = -(-3) + 2 = 3 + 2 = 5;\\
g(5^-) &= -f(5^- - 1) + 2 = -f(4^-) + 2 = -5 + 2 = -3;
\end{aligned}
$$

por lo que los puntos $(-5, -1)$, $(-3^-, -1)$, $(-3, -3)$, $(0, 6)$, $(1, 5)$, $(5^-, -3)$ están en la gráfica de g, de hecho son respectivamente A', B', C', D', E', F'.

Con la información anterior, hacemos el esbozo de la gráfica



□

9. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } -4 < x \le -1\,; \\ -1 & \text{si } -1 < x < 3\,; \\ (x-4)^2 & \text{si } x \ge 3\,. \end{cases}$$

a. Obtenga dominio, raíces y un bosquejo de la gráfica de g, así como su rango.
b. Grafique la función $h(x) = g(x+3) - 2$, a partir de la gráfica de g.

▼

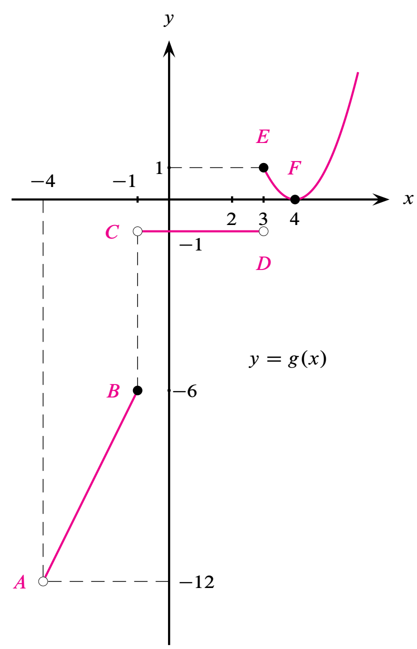
a. Dominio:

$$D_g = (-4, -1] \cup (-1, 3) \cup [3, +\infty) = (-4, +\infty)\,.$$

Raíces:

$$g(x) = 2x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 4 \;\Rightarrow\; x = 2, \text{ pero } x = 2 \notin (-4, -1]\ ;$$
$$g(x) = -1 \text{ no tiene raíces;}$$
$$g(x) = (x-4)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4 \;\&\; x = 4 \in [3, +\infty)\ .$$

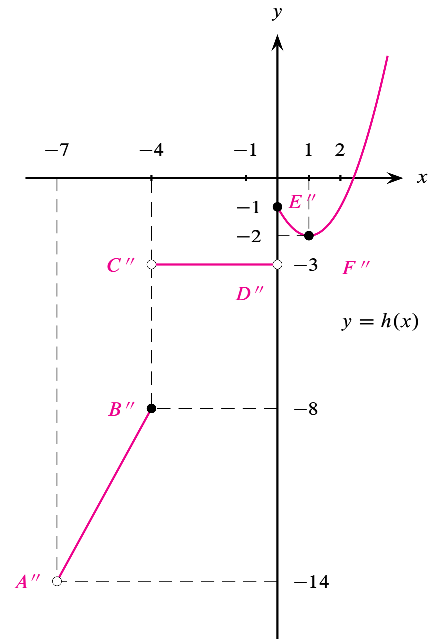
Vemos que g sólo tiene una raíz: $x = 4$.
Calculamos los valores de $g(x)$ en los extremos de cada intervalo para determinar:
$A = (-4^+, -12)$, $B = (-1, -6)$, $C = (-1^+, -1)$, $D = (3^-, -1)$, $E = (3, 1)$ y también $F = (4, 0)$.
Su gráfica es:



Rango: $R_g = (-12, -6] \cup \{-1\} \cup [0, +\infty)$.

b. La gráfica de la función $h(x) = g(x+3) - 2$ se obtiene trasladando a la gráfica de g, primero 3 unidades hacia la izquierda y luego 2 unidades hacia abajo. Entonces:

$$\begin{array}{lll} A(-4,-12) & \to A'(-7,-12) & \to A''(-7,-14); \\ B(-1,-6) & \to B'(-4,-6) & \to B''(-4,-8); \\ C(-1,-1) & \to C'(-4,-1) & \to C''(-4,-3); \\ D(3,-1) & \to D'(0,-1) & \to D''(0,-3); \\ E(3,1) & \to E'(0,1) & \to E''(0,-1); \\ F(4,0) & \to F'(1,0) & \to F''(1,-2). \end{array}$$



□

10. Sea f la función dada por $f(t) = t^2$ con $0 \le t \le 1$.

Sea g la función definida por

$$g(t) = \begin{cases} -f(-t) & \text{si } -1 \le t \le 0\,; \\ f(t) & \text{si } 0 \le t \le 1\,. \end{cases}$$

a. Hallar el dominio y hacer un bosquejo de la gráfica de g indicando su rango o imagen.
b. Si $h(t) = 2g(t-1)+3$, hacer un bosquejo de la gráfica de esta nueva función e indicar su dominio y rango.

▼

a. El dominio es: $D_g = [-1, 1]$.
Para bosquejar su gráfica es necesario ver cómo expresar

$$g(t) = -f(-t) \text{ para } -1 \le t \le 0.$$

Ya que

$$-1 \le t \le 0 \Rightarrow (-1)(-1) \ge (-1)t \ge (-1)0 \Rightarrow 1 \ge -t \ge 0 \Rightarrow 0 \le -t \le 1.$$

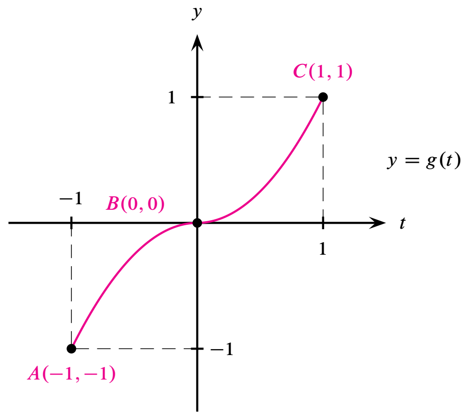
Entonces,

$$f(-t) = (-t)^2 = t^2 \;\&\; g(t) = -f(-t) = -t^2.$$

Por lo tanto, la función g puede expresarse como

$$g(t) = \begin{cases} -t^2 & \text{si } -1 \le t \le 0; \\ t^2 & \text{si } 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Cuya gráfica es:

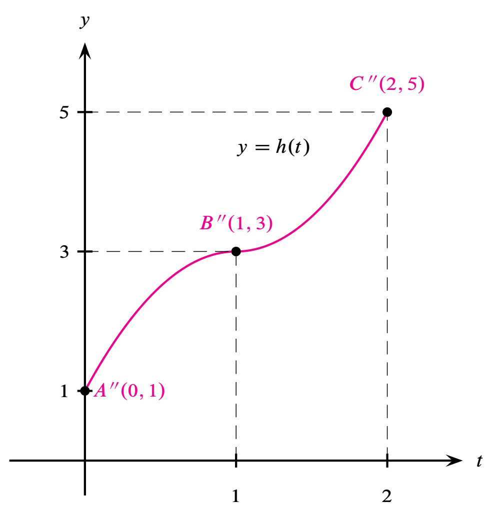


El rango o imagen de g es $R_g = [-1, 1]$.

b. Para bosquejar la gráfica de la función $h(t) = 2g(t-1) + 3$, iremos obteniendo las nuevas coordenadas de los puntos $A(-1,-1)$, $B(0,0)$ y $C(1,1)$ de la gráfica de g, a medida que se efectúen las acciones indicadas.

$y = g(t)$	$y = g(t-1)$	$y = 2g(t-1)$	$y = 2g(t-1)+3$
$A(-1,-1)$	$A'(0,-1)$	$A''(0,-2)$	$A'''(0,1)$
$B(0,0)$	$B'(1,0)$	$B''(1,0)$	$B'''(1,3)$
$C(1,1)$	$C'(2,1)$	$C''(2,2)$	$C'''(2,5)$

La gráfica de la función $h(t)$ resulta:



Dominio: $D_h = [0, 2]$.
Rango: $R_h = [1, 5]$.

□

11. Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \le -1; \\ |\,3x-4\,| & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

$$g(x) = 3f(x+1) - 4,$$

determinar las gráficas de ambas funciones, el dominio y el rango de la función g.

▼ Considerando que

$$|3x-4| = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } 3x-4 \geq 0 \\ -(3x-4) & \text{si } 3x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x \geq \dfrac{4}{3}; \\ -3x+4 & \text{si } x < \dfrac{4}{3}, \end{cases}$$

reescribimos la función f como

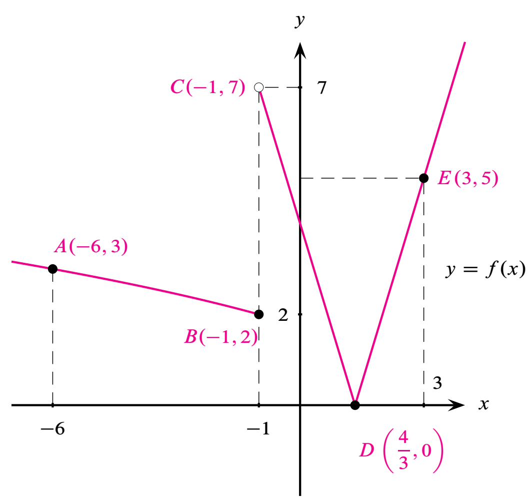
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3-x} & \text{si } x \leq -1; \\ -3x+4 & \text{si } -1 < x < \dfrac{4}{3}; \\ 3x-4 & \text{si } x \geq \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Para tener la gráfica de f debemos ver que

$$y = \sqrt{3-x} \Rightarrow y^2 = 3-x \Rightarrow (y-0)^2 = -1(x-3),$$

es decir, que $y = \sqrt{3-x}$ es una semiparábola con eje horizontal la cual se abre hacia la izquierda desde su vértice $V(3,0)$.

Un bosquejo de la gráfica de f:



Obtenemos la gráfica de la función $g(x) = 3f(x+1) - 4$ mediante etapas y partiendo de la gráfica de la función f.

$y = f(x+1)$ se obtiene desplazando a $y = f(x)$ una unidad hacia la izquierda.

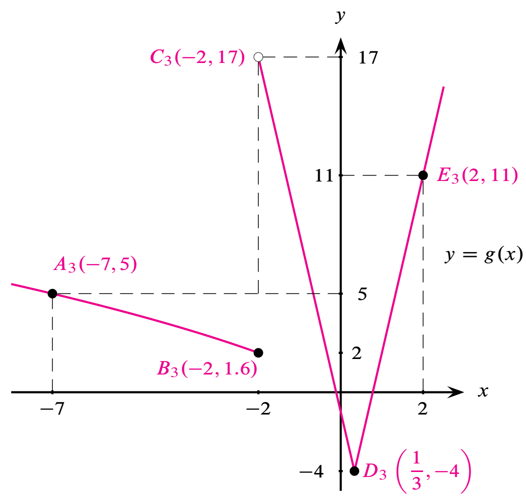
$y = 3f(x+1)$ se obtiene multiplicando por 3 las ordenadas de $y = f(x+1)$.

Finalmente $y = 3f(x+1) - 4$ se obtiene de $y = 3f(x+1)$ trasladándola 4 unidades hacia abajo.

Veamos las coordenadas de los puntos A, B, C, D, E, después de cada etapa

$y = f(x)$	$y = f(x+1)$	$y = 3f(x+1)$	$y = 3f(x+1) - 4$
$A(-6,3)$	$A_1(-7,3)$	$A_2(-7,9)$	$A_3(-7,5)$
$B(-1,2)$	$B_1(-2,2)$	$B_2(-2,6)$	$B_3(-2,2)$
$C(-1,7)$	$C_1(-2,7)$	$C_2(-2,21)$	$C_3(-2,17)$
$D\left(\dfrac{4}{3},0\right)$	$D_1\left(\dfrac{1}{3},0\right)$	$D_2\left(\dfrac{1}{3},0\right)$	$D_3\left(\dfrac{1}{3},-4\right)$
$E(3,5)$	$E_1(2,5)$	$E_2(2,15)$	$E_3(2,11)$

Ahora la gráfica de la función g:



El dominio de g es $\mathbb{R}$ y el rango de g es el intervalo $(-4, +\infty)$.

□

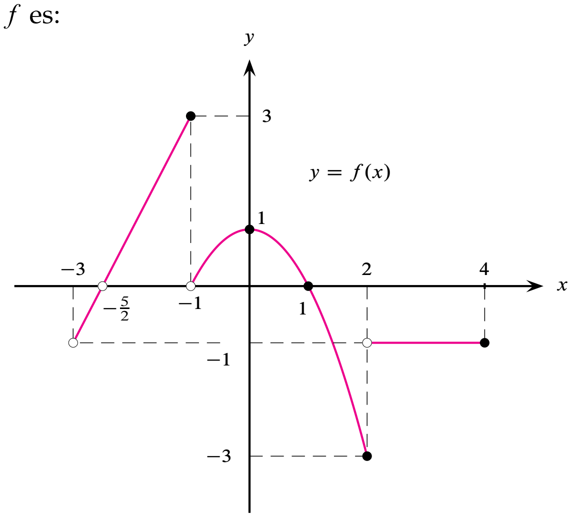
12. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } -3 < x \leq -1\,; \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2\,; \\ -1 & \text{si } 2 < x \leq 4\,. \end{cases}$$

a. Obtener la gráfica, el rango y las raíces de f.
b. A partir de la gráfica de f hacer un bosquejo de la gráfica de la función $g(x) = 2 - f(x - 1)$.

▼

a. La gráfica de la función f es:



Rango: $R_f = [-3, 3]$.

Raíces:

$$2x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{5}{2} \text{ es raíz pues } -3 < -\frac{5}{2} \leq -1.$$

$$1 - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1 \;\Rightarrow\; x = 1 \text{ es raíz pues } -1 < 1 \leq 2.$$

$$x = -1 \text{ no es raíz pues } -1 \notin (-1, 2]\,.$$

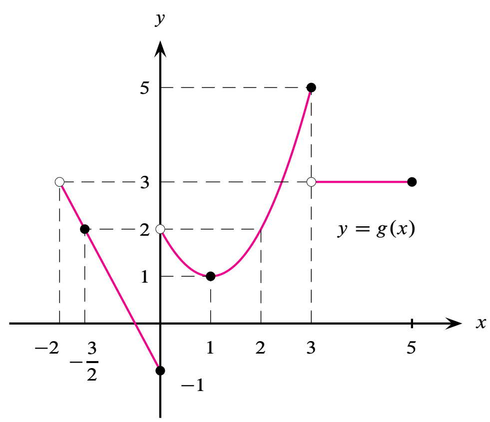
b. Tenemos que deslizar la gráfica de f una unidad hacia la derecha y reflejarla con respecto al eje de las x; por último, deslizarla hacia arriba dos unidades.

De hecho los puntos $(-3, -1)$, $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$, $(-1, 0)$, $(2, -1)$ (que no están en la gráfica de f) así como los puntos $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, -3)$, $(4, -1)$ se transformarán para obtener nuevos puntos y con ellos construir la gráfica de g.

Nótese que algunos de estos nuevos puntos no pertenecen a la gráfica de g.

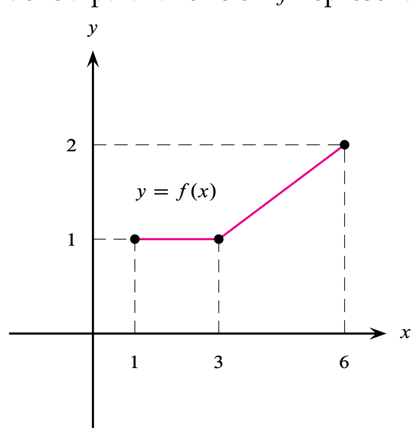
$$(-3, -1) \to (-2, -1) \to (-2, 1) \to (-2, 3)\,;$$
$$\left(-\frac{5}{2}, 0\right) \to \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \to \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \to \left(-\frac{3}{2}, 2\right);$$
$$(-1, 3) \to (0, 3) \to (0, -3) \to (0, -1)\,;$$
$$(-1, 0) \to (0, 0) \to (0, 0) \to (0, 2)\,;$$
$$(0, 1) \to (1, 1) \to (1, -1) \to (1, 1)\,;$$
$$(1, 0) \to (2, 0) \to (2, 0) \to (2, 2)\,;$$
$$(2, -3) \to (3, -3) \to (3, 3) \to (3, 5)\,;$$
$$(2, -1) \to (3, -1) \to (3, 1) \to (3, 3)\,;$$
$$(4, -1) \to (5, -1) \to (5, 1) \to (5, 3)\,.$$

Por lo que la gráfica solicitada de g es:



□

13. a. Encuentre la regla de correspondencia para la función f representada por la siguiente gráfica:



b. Elabore la gráfica de la función dada por: $g(x) = 3f(2x - 2) + 2$.

▼

a. Desde luego $f(x) = 1$ si $x \in [1, 3]$.
Para $x \in [3, 6]$, la gráfica de $f(x)$ es el segmento de recta que pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(6, 2)$, esto es, que tiene de pendiente $m = \dfrac{2-1}{6-3} = \dfrac{1}{3}$.
Su ecuación entonces, por pasar por $(3, 1)$, es:

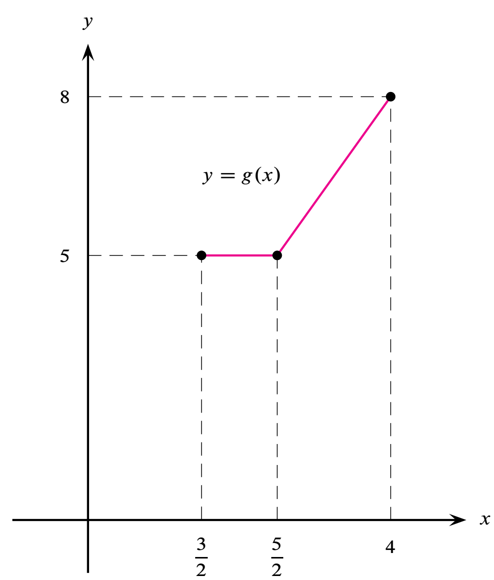
$$y - 1 = \frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{3}x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x;$$

(su ordenada en el origen es 0) y por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 3]\,; \\ \dfrac{1}{3}x & \text{si } x \in [3, 6]\,. \end{cases} \qquad \text{Observe que } f(3) = 1.$$

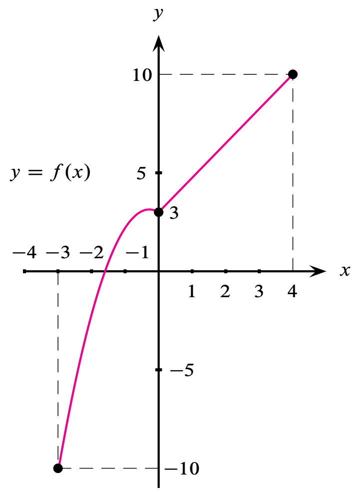
b. Calculemos explícitamente $g(x)$.
Si $1 \le 2x - 2 \le 3 \Rightarrow 3 \le 2x \le 5 \Rightarrow \dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{5}{2}$,
$g(x) = 3f(2x-2) + 2 = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$.
Pero si $3 \le 2x - 2 \le 6 \Rightarrow 5 \le 2x \le 8 \Rightarrow \dfrac{5}{2} \le x \le 4$,
$g(x) = 3f(2x-2) + 2 = 3\dfrac{1}{3}(2x-2) + 2 = 2x - 2 + 2 = 2x$; luego, tenemos que graficar

$$g(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \in \left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right]; \\ 2x & \text{si } x \in \left[\dfrac{5}{2}, 4\right]. \end{cases} \qquad \text{Observe que } g\left(\frac{5}{2}\right) = 5.$$



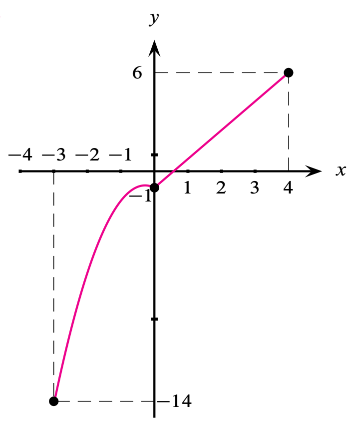
□

14. Dada la gráfica de una función f:

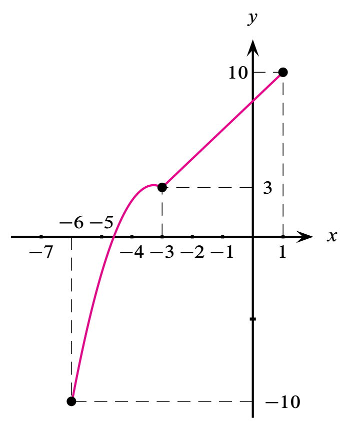


asocie cada una de las siguientes funciones $f(x+3)$, $-2f(x)$ & $f(x)-4$ con su gráfica correspondiente.

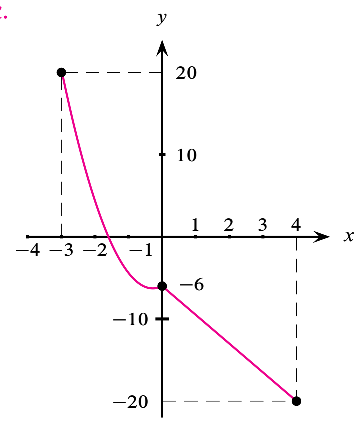
a.



b.

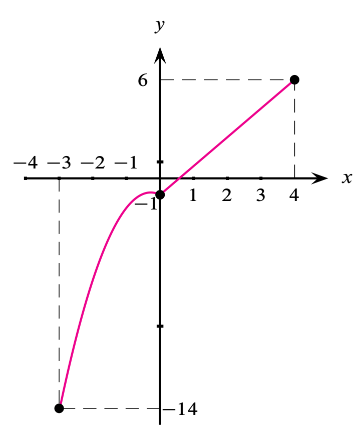


c.

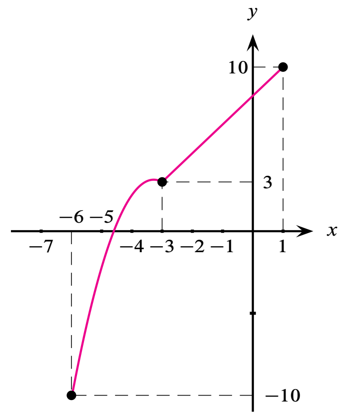


▼

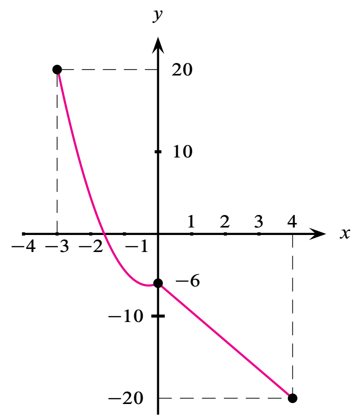
a. Ésta es la función $y = f(x) - 4$.



b. Ésta es la función $y = f(x+3)$.



c. Ésta es la función $y = -2f(x)$.



□

15. Sea

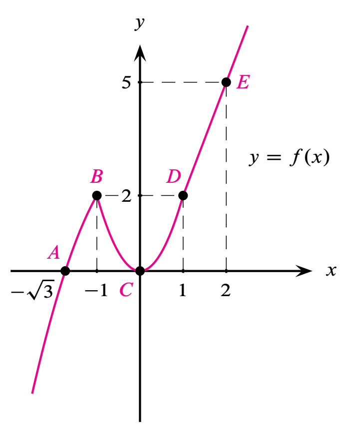
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{si } x < -1\,; \\ 2x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1\,; \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Grafique:

a. $f(x)$.
b. $g(x) = f(x-2) + 5$.
c. $h(x) = |\,f(x)\,|$.

▼

a. Un bosquejo de la gráfica de f es:

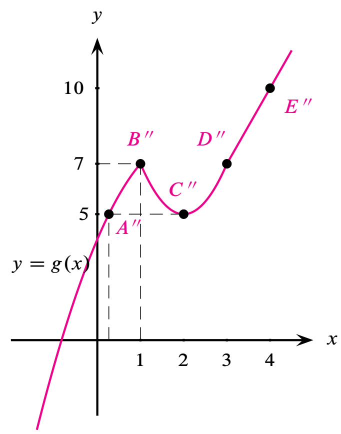


Puntos de control: $A(-\sqrt{3}, 0)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 0)$, $D(1, 2)$, $E(2, 5)$.

b. Un bosquejo de la gráfica de $g(x) = f(x-2) + 5$ se obtiene de la siguiente manera: la gráfica de f es trasladada 2 unidades hacia la derecha y la nueva gráfica así obtenida es trasladada 5 unidades hacia arriba. Los puntos de control adoptan las posiciones siguientes:

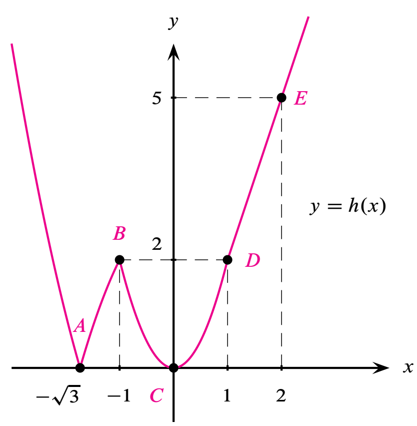
$$
\begin{array}{lll}
A(-\sqrt{3}, 0) & \to A'(-\sqrt{3}+2, 0) & \to A''(2-\sqrt{3}, 5);\\
B(-1, 2) & \to B'(1, 2) & \to B''(1, 7);\\
C(0, 0) & \to C'(2, 0) & \to C''(2, 5);\\
D(1, 2) & \to D'(3, 2) & \to D''(3, 7);\\
E(2, 5) & \to E'(4, 5) & \to E''(4, 10).
\end{array}
$$

El bosquejo resultante es:



c. Un bosquejo de la gráfica de $h(x) = |\,f(x)\,|$ se obtiene de la manera siguiente: la porción de la gráfica de f que se encuentre por debajo del eje x es reflejada con respecto a dicho eje (poniendo un espejo en el eje x) y la porción de la gráfica de f, que está por encima del eje x, se deja igual.

El bosquejo resultante es:



□

16. Considere la función

$$
f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 0 \le x < 1\,;\\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } 1 \le x \le 3\,. \end{cases}
$$

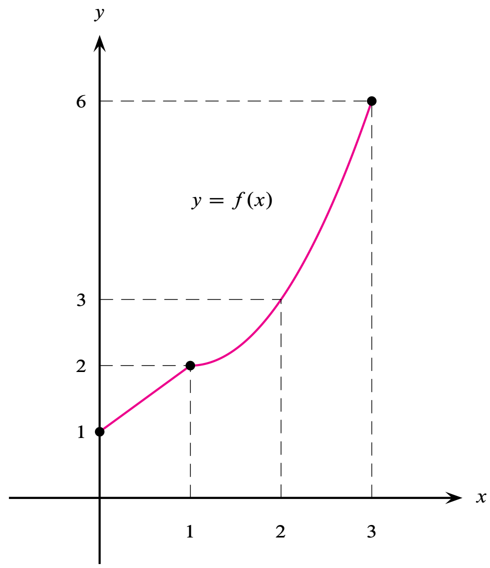
a. Determinar dominio, raíces, gráfica e imagen o rango de f.

b. A partir de su gráfica, construir la gráfica de $g(x) = |\,f(x)\,|$.

c. Graficar la función $h(x) = -f(x-1) + 1$.

▼

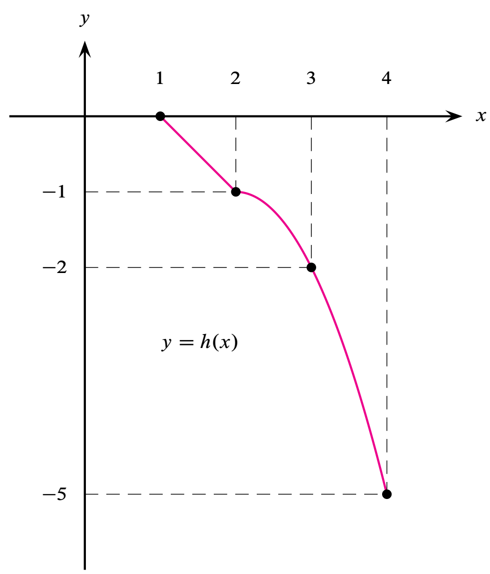
a. Dominio: $D_f = [0, 3]$.
Raíces: no tiene.
La gráfica de f:



Rango: $R_f = [1, 6]$.

b. $f(x) = |\, f(x)\,|$, pues $f(x) \geq 0$ si $x \in D_f$; luego $f(x) = g(x)$ y tienen la misma gráfica.

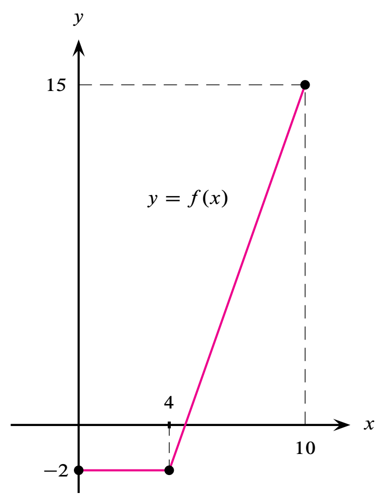
c. Para obtener la gráfica de h la curva $y = f(x)$ se traslada 1 unidad a la derecha, luego se refleja con respecto al eje x y finalmente se desplaza 1 unidad hacia arriba.
La gráfica de h es:



Como
$f(0) = 1, \quad f(1^-) = 2^-, \quad f(1^+) = 2^+, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 3$ & $f(3) = 6$,
entonces
$h(1) = 0, \quad h(2^-) = -1^-, \quad h(2^+) = -1^+, \quad h(2) = -1, \quad h(3) = -2$ & $h(4) = -5$.

□

17. La siguiente es la gráfica de una función $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$.



a. Determine su regla de correspondencia.

b. Considere la función g definida por

$$g(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{si } -10 \le x < 0\,; \\ f(x) & \text{si } 0 \le x \le 10\,. \end{cases}$$

Bosqueje la gráfica de g. Determine su dominio, rango y raíces.

c. Sea $h(x) = g(x + 1) - 2$; a partir de la gráfica de g obtenga la de h.

▼

a. En $[0, 4]$ la gráfica de f es el segmento de la recta $y = -2$.

En $[4, 10]$ la gráfica de f es el segmento de la recta que une los puntos $(4, -2)$ y $(10, 15)$, por lo tanto tiene pendiente

$$m = \frac{15 - (-2)}{10 - 4} = \frac{15 + 2}{6} = \frac{17}{6}\,.$$

Por pasar por el punto $(4, -2)$, la ecuación de la recta es:

$$y + 2 = \frac{17}{6}(x - 4).$$

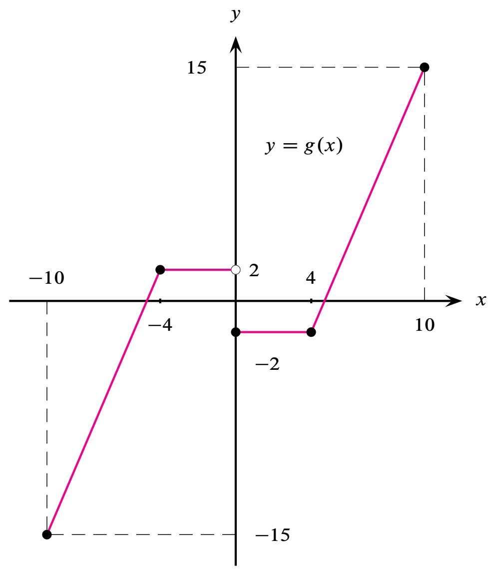
Así:

$$y = \frac{17}{6}x - \frac{17(2)}{3} - 2 = \frac{17}{6}x - \frac{34 + 6}{3} = \frac{17}{6}x - \frac{40}{3}$$

y entonces la regla de correspondencia para la función f será:

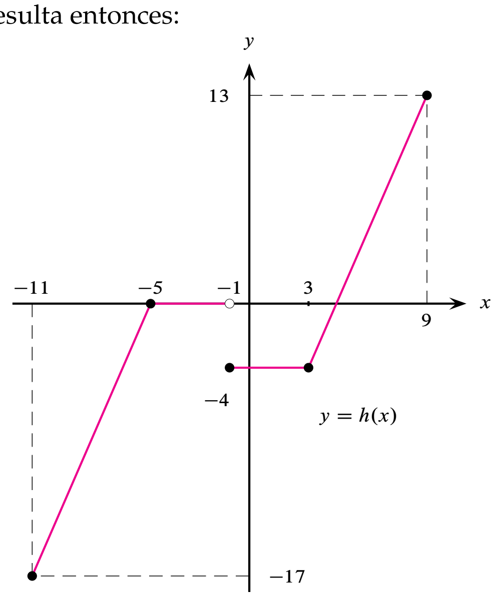
$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } 0 \le x < 4; \\ \dfrac{17}{6}x - \dfrac{40}{3} & \text{si } 4 \le x \le 10. \end{cases}$$

b. La gráfica de g es:



Dominio: $D_g = [-10, 10]$.
Rango: $R_g = [-15, 15]$.
Raíces: si $\dfrac{17}{6}x - \dfrac{40}{3} = 0 \Rightarrow \dfrac{17}{6}x = \dfrac{40}{3} \Rightarrow x = \dfrac{40 \times 6}{17 \times 3} = \dfrac{40 \times 2}{17} = \dfrac{80}{17}$. Por simetría otra raíz de g es $x = -\dfrac{80}{17}$.

c. A la curva $y = g(x)$ se le traslada 1 unidad hacia la izquierda y luego 2 unidades hacia abajo. La gráfica de la función h resulta entonces:



□

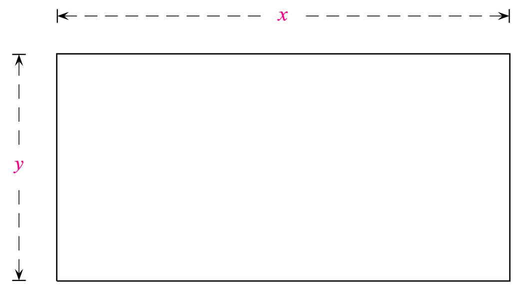
2.8 Modelando con funciones

Ejercicios 2.8.1

1. Las dimensiones de un rectángulo pueden variar, pero no su área que debe ser de A cm^2. Considerando que uno de sus lados mide x cm, expresar el perímetro P del rectángulo en función de x.

▼ ¿Qué se pide en el problema? Expresar el perímetro P de un rectángulo en función dela longitud x de uno de sus lados a sabiendas de que su área debe ser exactamente A cm^2. Nuestro objetivo

es el perímetro P de un rectángulo, pero no de cualquier rectángulo sino de aquel cuya área sea precisamente A cm^2.



Considerando un rectángulo con base de longitud x cm y altura de longitud y cm, se tiene que el perímetro es

$$P = 2x + 2y \text{ cm}$$

y el área es

$$A = xy \text{ cm}^2.$$

Observamos entonces que el perímetro P está en función de las dos variables x & y, las mismas que están relacionadas en la ecuación $A = xy$.

Por esto, para expresar el perímetro P en función (sólo) de x, es necesario despejar la (otra) variable y de la ecuación $xy = A$ para luego sustituirla en la función perímetro P.

De $xy = A$ se obtiene $y = \dfrac{A}{x}$.

Al sustituir en P se llega a

$$P = 2(x + y) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right);$$

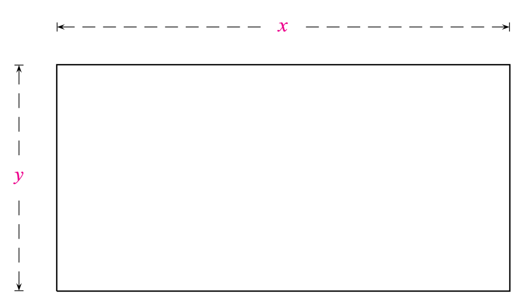
es decir,

$$P(x) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right),$$

que es la función requerida. □

2. El perímetro de un rectángulo debe ser P cm. Expresar el área A del rectángulo en función de la longitud y de uno de sus lados.

▼ ¿Qué se pide en el problema? Expresar el área A de un rectángulo en función de la longitud y de uno de sus lados, a sabiendas de que su perímetro debe ser P cm. Entonces nuestro objetivo está en el área A de un rectángulo; pero no de cualquier rectángulo, sino de aquel cuyo perímetro sea precisamente P cm.



Considerando un rectángulo con base de longitud x cm y altura de longitud y cm, encontramos que el perímetro es

$$P = 2x + 2y \text{ cm}$$

y el área es

$$A = xy \text{ cm}^2 .$$

Observamos entonces que el área A está en función de dos variables x & y, las mismas que están relacionadas en la ecuación $P = 2x + 2y$.

Por esto, para expresar el área A en función (sólo) de y, es necesario despejar la (otra) variable x de la ecuación $P = 2x + 2y$ para luego sustituirla en la función área A.

De $2(x + y) = P$ llegamos a $x = \dfrac{P}{2} - y$.

Al sustituir en A:

$$A = xy = \left(\frac{P}{2} - y\right)y ;$$

es decir,

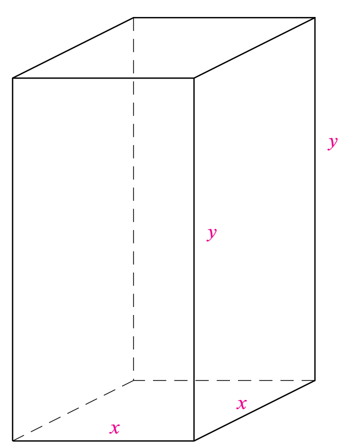
$$A(y) = \left(\frac{P}{2} - y\right)y ,$$

que es la función requerida.

□

3. Las dimensiones de un paralelepípedo (caja con caras laterales rectangulares) pueden variar, pero no su volumen que debe ser igual a V m^3. Considerando que la caja tiene base cuadrada con lado de longitud igual a x m, expresar el área A de la superficie total del paralelepípedo en función de x.

▼ ¿Qué se pide en el problema? Expresar el área A de la superficie de una caja de base cuadrada, en función de la longitud x del lado de dicho cuadrado, a sabiendas de que su volumen debe ser V m^3. Entonces nuestro objetivo está en el área A de una caja; pero no de cualquier caja, sino de aquella cuyo volumen sea precisamente V m^3.



Puesto que la caja tiene base y tapa cuadradas de lado x m y altura de longitud y m, el área total es

$$A = 2x^2 + 4xy \text{ m}^2$$

y el volumen es

$$V = x^2 y \text{ m}^3.$$

Entonces el área A está en función de las variables x & y, las mismas que están relacionadas en la ecuación $V = x^2 y$.

Por esto, para expresar el área A en función (sólo) de x, es necesario despejar la (otra) variable y de la ecuación $x^2y = V$, para luego sustituirla en la función área A.

De $x^2y = V$, llegamos a $y = \dfrac{V}{x^2}$.

Al sustituir en A:

$$A = 2x^2 + 4xy = 2x^2 + 4x\left(\frac{V}{x^2}\right);$$

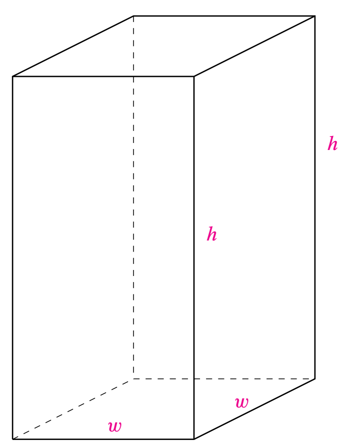
es decir,

$$A(x) = 2x^2 + \frac{4V}{x},$$

que es la función requerida. □

4. Una caja con base y tapa cuadradas tiene una superficie de área A cm^2. Expresar el volumen V de la caja en función de la longitud de uno de sus lados.

▼



Considerando una caja con base y tapa cuadradas de lado w y altura de longitud h, observamos que el área total es

$$A = 2w^2 + 4wh$$

y el volumen es

$$V = w^2h.$$

Entonces el volumen V está en función de las variables w & h, las mismas que están relacionadas en la ecuación $A = 2w^2 + 4wh$.

Por esto, para expresar el volumen V en función de solamente una de las variables (w o bien h), es necesario despejar la otra variable (h o bien w, respectivamente) de la ecuación $2w^2 + 4wh = A$, para luego sustituirla en la función volumen V.

Aquí es importante preguntarse ¿cuál de las variables debemos despejar? La respuesta es: la que convenga. Nótese que en este caso conviene despejar la variable h.

De $2w^2 + 4wh = A$ se tiene que $h = \dfrac{A - 2w^2}{4w}$.

Al sustituir en V:

$$V = w^2h = w^2\left(\frac{A - 2w^2}{4w}\right),$$

es decir,

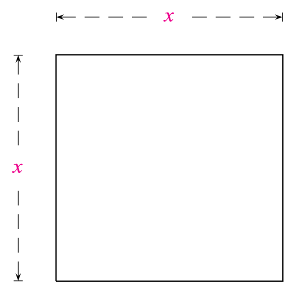
$$V(w) = \frac{A}{4}w - \frac{1}{2}w^3,$$

que es la función requerida. □

5. a. Exprese el área A de un cuadrado en función de su perímetro P.
   b. Exprese el perímetro P de un cuadrado en función de su área A.

▼

a.



Se sabe que el área A de un cuadrado es:

$$A = x^2, \text{ donde } x \text{ es la longitud de uno de los lados iguales.}$$

También se sabe que su perímetro es:

$$P = 4x.$$

Despejando x de esto último:

$$x = \frac{P}{4}.$$

Sustituyendo en la ecuación del área, tenemos:

$$A = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16} = \frac{1}{16}P^2;$$
$$A(P) = \frac{1}{16}P^2.$$

Que es la función requerida.

b. De la ecuación del área $A = x^2$, despejamos x y obtenemos:

$$x = \sqrt{A}.$$

Sustituimos en la fórmula del perímetro $P = 4x$ y obtenemos:

$$P(A) = 4\sqrt{A}.$$

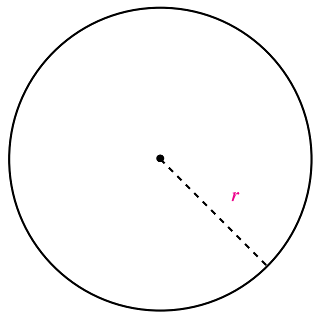
Ésta es la función requerida.

□

6. a. Exprese el área A de un círculo en función de su perímetro C.
   b. Exprese el perímetro C de un círculo en función de su área A.

▼

a. Usamos la siguiente figura:



Se sabe que el área A de un círculo es:

$$A = \pi r^2, \text{ donde } r \text{ es la longitud del radio.}$$

También se sabe que la longitud de la circunferencia es:

$$C = 2\pi r.$$

Despejando r de esto último:

$$r = \frac{C}{2\pi}.$$

Sustituyendo en la ecuación del área tenemos:

$$A = \pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{1}{4\pi^2}C^2 = \frac{1}{4\pi}C^2;$$
$$A(C) = \frac{1}{4\pi}C^2.$$

Que es la función solicitada.

b. De la ecuación del área $A = \pi r^2$ despejamos r y obtenemos:

$$r^2 = \frac{A}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

Como $r > 0$, desechamos la raíz negativa $r = -\sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Sustituimos en la fórmula del perímetro $C = 2\pi r$ y obtenemos:

$$C(A) = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2\sqrt{\pi A}.$$

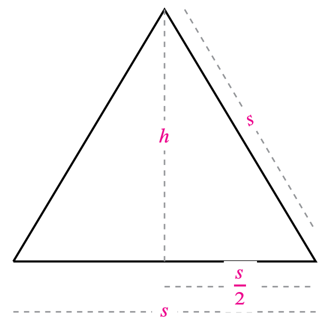
Ésta es la función requerida.

□

7. a. Exprese el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.
   b. Exprese el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud h de la altura.

▼

a. Usamos la siguiente figura:



Se sabe que el área A de un triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}(s \times h), \text{ donde } s \text{ es la base y } h \text{ la altura.}$$

De la figura, aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$s^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = h^2 + \frac{s^2}{4} = h^2 + \frac{1}{4}s^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}s^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}s.$$

Como $h > 0$ desechamos la raíz negativa $h = -\frac{\sqrt{3}}{2}s$.
Sustituyendo en la ecuación del área tenemos:

$$A = \frac{1}{2}(s \times \frac{\sqrt{3}}{2}s) \Rightarrow A(s) = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2.$$

Que es la función solicitada.

b. De la relación $h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$ obtenemos:

$$s = \frac{2}{\sqrt{3}}h.$$

Sustituimos en la fórmula del área $A = \frac{1}{2}(s \times h)$ y obtenemos:

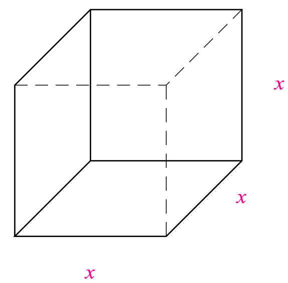
$$A(h) = \frac{1}{2}(\frac{2}{\sqrt{3}}h \times h) = \frac{1}{\sqrt{3}}h^2.$$

Ésta es la función requerida.

□

8. Exprese el volumen V de un cubo en función del área A de su base.

▼ Usamos la siguiente figura:



Se sabe que el volumen V de un cubo es:

$$V = x^3\text{, donde } x \text{ es la longitud de cualquier arista del cubo.}$$

El área de la base es:

$$A = x^2.$$

De aquí:

$$x = \sqrt{A} = A^{\frac{1}{2}}.$$

Sustituyendo en la ecuación del volumen, tenemos:

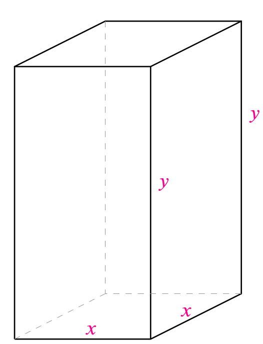
$$V = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^3 = A^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{A^3};$$
$$V(A) = \sqrt{A^3} = A\sqrt{A}.$$

Que es la función solicitada.

□

9. Una caja con base y tapa cuadradas de lado x tiene una superficie total de 600 m^2. Expresar el volumen V de la caja como función de x.

▼ Utilizamos la siguiente figura:



La superfice total de la caja es:

$$2x^2 + 4xy = 600.$$

Despejando y:

$$y = \frac{600 - 2x^2}{4x}.$$

El volumen de la caja viene dado por la expresión

$$V = x^2 y.$$

Sustituyendo la variable y despejada anteriormente:

$$V(x) = x^2\left(\frac{600 - 2x^2}{4x}\right) = \frac{600x - 2x^3}{4} = \frac{300x - x^3}{2}.$$

Que es la función solicitada. □

10. Una pecera de 1.5 pies de altura h tiene un volumen de 6 pies cúbicos. Si x es el largo de la base, y su ancho es y:

   a. Determine y como función de x. Además grafique esta función.

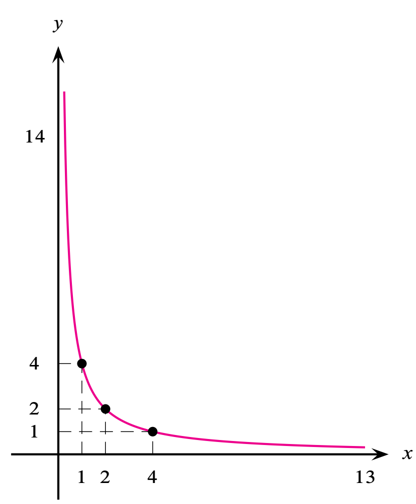
   b. Encuentre la cantidad de material necesario, en pies cuadrados, para construir la pecera en función de x.

▼

   a. Como el volumen de un prisma recto rectangular es el área de la base por la altura, en el caso de la pecera observamos que $1.5xy = 6$, entonces:

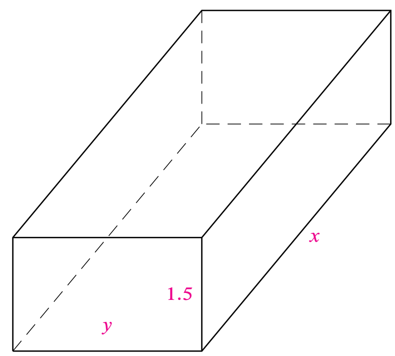
$$y = \frac{6}{1.5x} \Rightarrow y = \frac{4}{x}.$$

   Cuya gráfica es:



   Su dominio son los reales positivos y su rango es el intervalo $(0, +\infty)$.

   b. Ahora el área total A del material que se requiere; puesto que la pecera no tiene tapa, es la suma de las áreas de 5 rectángulos: el fondo que tiene por área xy y las 4 caras laterales que son iguales por parejas, 2 de área $1.5x$ y 2 con $1.5y$.



En total

$$A = 2(1.5x) + 2(1.5y) + xy = 3x + 3y + xy = 3(x + y) + xy;$$

Sustituyendo y por $\dfrac{4}{x}$, obtenemos:

$$A = 3\left(x + \frac{4}{x}\right) + x\left(\frac{4}{x}\right);$$

y ahora simplificando

$$A(x) = 3\left(x + \frac{4}{x}\right) + 4.$$

□

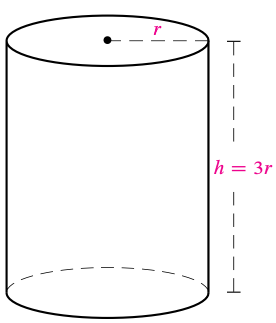
11. Un envase cilíndrico tiene una altura igual al triple del radio r.

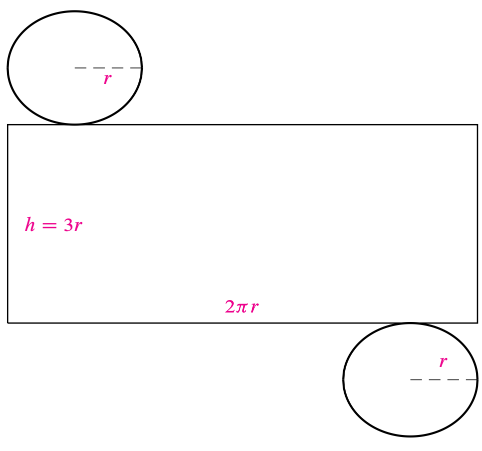
 a. Determine la superficie del envase, considerando sus dos tapas, en función del radio.

 b. Si se desean fabricar envases cuyos radios están entre 3 y 5 dm, ¿cuál es la respectiva variación de volumen de los envases?

▼

 a. Usaremos las siguientes figuras:





La superficie S del envase será el área lateral que claramente es el área de un rectángulo de altura $3r$ y de base la longitud de una circunferencia de radio r, $2\pi r$, esto es, $6\pi r^2$, más el área de las dos tapas, $2\pi r^2$; es decir:

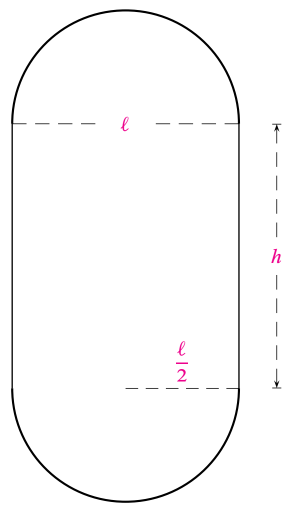
$$S(r) = 6\pi r^2 + 2\pi r^2 = 8\pi r^2.$$

b. Como el volumen del cilindro $V(r)$, es el área de la base πr^2 por la altura $3r$, entonces $V(r) = 3\pi r^3$, y cuando $r = 3$ dm, tenemos $V(3) = 81\pi$ dm^3 y $V(5) = 375\pi$ dm^3, por lo que el volumen del recipiente varía de 81π a 375π. En otras palabras, $V(r) \in [81\pi, 375\pi]$.

□

12. Un terreno tiene la forma de un rectángulo con dos semicírculos adosados a dos de sus lados opuestos. Si el perímetro del terreno es de 800 m, hallar el área A del terreno en función de la longitud ℓ de uno de los lados del rectángulo.

▼ Dibujemos primero el terreno.



Su perímetro de 800 m es igual a

$$P = 800 = 2h + 2\pi\frac{\ell}{2} = 2h + \pi\ell\,;$$

su área es

$$A = \ell h + \pi\frac{\ell^2}{4}\,.$$

Si queremos expresar esta área en función exclusivamente de ℓ tenemos que sustituir el otro lado h en términos de ℓ y esto lo podemos hacer pues como

$$800 = 2h + \pi\ell;\ \text{entonces } h = \frac{800 - \pi\ell}{2}\,.$$

Se sustituye por este valor:

$$A = \ell\frac{800 - \pi\ell}{2} + \frac{\pi\ell^2}{4} = \frac{1600\ell - 2\pi\ell^2 + \pi\ell^2}{4} = \frac{1600\ell - \pi\ell^2}{4}\,;$$

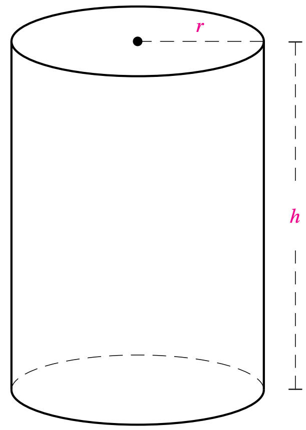
esto es

$$A = \ell\frac{1600 - \pi\ell}{4} = \frac{1}{4}\left(1600\ell - \pi\ell^2\right)\,.$$

□

13. Una lata tiene capacidad de 1 dm^3 y forma de un cilindro circular recto. Exprese el área de la superficie de la lata como función de su radio.

▼ Usando la figura



consideremos que la lata cilíndrica tiene r dm de radio y h dm de altura.

Se sabe que la capacidad (volumen) de la lata es de 1 dm^3 y también se sabe que el volumen de esta lata es

$$V = \pi r^2 h \text{ dm}^3.$$

Entonces,

$$\pi r^2 h = 1.$$

Se desea expresar el área de la superficie de la lata como función de radio r a sabiendas que dicha área es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

que está en función de r & h.

Para tener el área A en función sólo de r, despejamos h de la ecuación $\pi r^2 h = 1$ para luego sustituirla en A

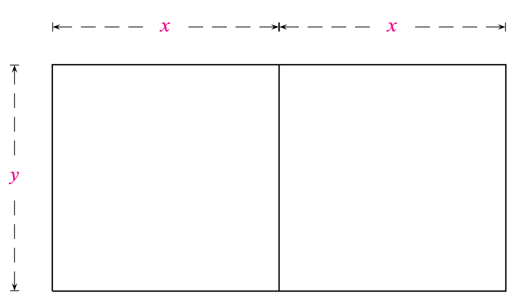
$$\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$ que es el área A de la superficie como función de r.

□

14. Un granjero dispone de 200 m de valla para cercar dos corrales adyacentes (véase figura). Expresar el área A encerrada como función de x



▼ Por un lado el total de valla que se usa es $V = 4x + 3y = 200$, por lo que

$$y = \frac{200 - 4x}{3}.$$

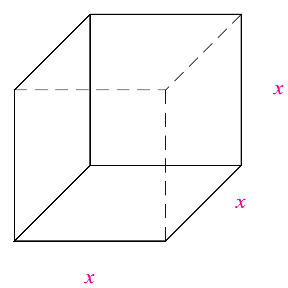
El área total es: $A_{\square} = 2xy$. Si sustituimos y por $\frac{200 - 4x}{3}$ tenemos al área expresada como función de x:

$$A_{\square}(x) = 2x\left(\frac{200 - 4x}{3}\right) = \frac{2x(200 - 4x)}{3}.$$

□

15. Una caja cerrada, en forma de cubo, va a construirse con dos materiales diferentes. El material de las caras laterales cuesta 2.5 pesos por centímetro cuadrado y el material de la base y la tapa cuesta 3 pesos por centímetro cuadrado. Exprese el costo total C de la caja en función de la longitud x de uno de sus lados.

▼ Usamos la siguiente figura:



Las caras laterales de la caja tienen el área:

$$A_L = 4x^2, \text{ donde } x \text{ cm es la longitud de cualquier arista del cubo.}$$

La tapa y la base tienen el área:

$$A_B = 2x^2.$$

El costo de las áreas laterales es:

$$C_L = 2.5 \times A_L = 2.5 \times 4x^2 = 10x^2 \text{ pesos.}$$

El costo de la base y la tapa es

$$C_B = 3 \times A_B = 3 \times 2x^2 = 6x^2 \text{ pesos.}$$

El costo total es por lo tanto:

$$C_T = C_L + C_B = 10x^2 + 6x^2 = 16x^2 \text{ pesos;}$$

$$C(x) = 16x^2 \text{ pesos.}$$

Que es la función solicitada.

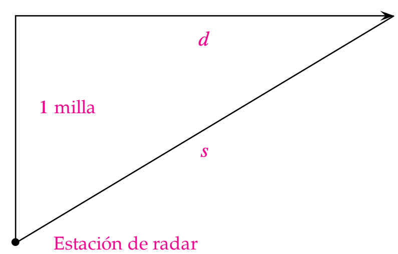
□

16. Un avión vuela a una velocidad de 350 millas/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el instante $t = 0$.

   a. Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión recorre como función del tiempo t.
   b. Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d.
   c. Aplique la composición de funciones para expresar s como función de t.

▼

   a. $d = 350t$, con t expresado en horas y suponiendo que la Tierra es plana.
   b. Usamos la siguiente gráfica:



Vemos que

$$s = \sqrt{1 + d^2}.$$

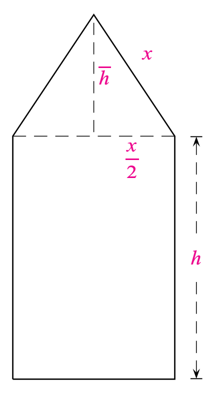
   c. Aplicamos la composición $s = f \circ d$, donde $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$; así:

$$s(t) = (f \circ d)(t) = f[d(t)] = f(350t) = \sqrt{1 + (350t)^2}.$$

□

17. Una ventana inglesa tiene la forma de rectángulo coronado con un triángulo equilátero. Si el perímetro de la ventana es de 30 m, exprese el área de la ventana en función de su ancho.

▼ Usamos la siguiente gráfica:



Calculamos el perímetro e igualamos con la restricción dada

$$P = 3x + 2h = 30. \quad (*)$$

El área total consta de dos partes:

   a. El área del rectángulo

$$A_R = xh.$$

b. El área del triángulo superior
Para calcular esta área usamos el teorema de Pitágoras para conocer la altura $\overline{h}$:

$$(\overline{h})^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow (\overline{h})^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow \overline{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es:

$$A_T = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

El área total es:

$$A = A_R + A_T = xh + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2. \qquad (**)$$

Despejamos de (*) la variable h y obtenemos:

$$h = 15 - \frac{3}{2}x.$$

Sustituimos por este valor en (**):

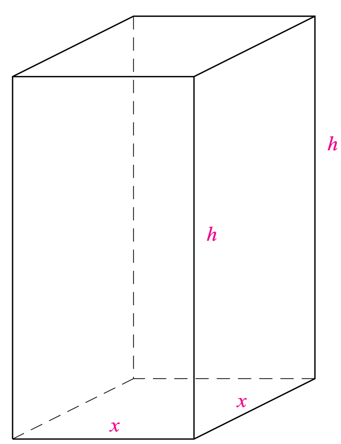
$$A = x(15 - \frac{3}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 15x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 15x + \frac{-6+\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Es ésta la función solicitada. □

18. Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar 12 000 pies^3 de agua. El concreto para construir la base y las caras laterales tiene un costo de \$100.00 por pie^2 y el material para construir la tapa cuesta \$200.00 por pie^2.

Obtenga el costo de la construcción de la cisterna en función de la longitud x del lado de la base.

▼ Veamos la correspondiente figura:



El área de la tapa es:

x^2pies^2 (x en pies) y su costo es entonces $200x^2$ pesos.

El costo de la base es $100x^2$ pesos.

El área de las cuatro caras laterales es $4xh$ pies^2 y el costo es $400xh$ pesos; pero las variables x & h están relacionadas pues el volumen de la cisterna, 12 000 pies^3, es igual al área de la base x^2 por la altura h:

$$V = 12\,000 = x^2h\,,$$

y de aquí que

$$h = \frac{12\,000}{x^2};$$

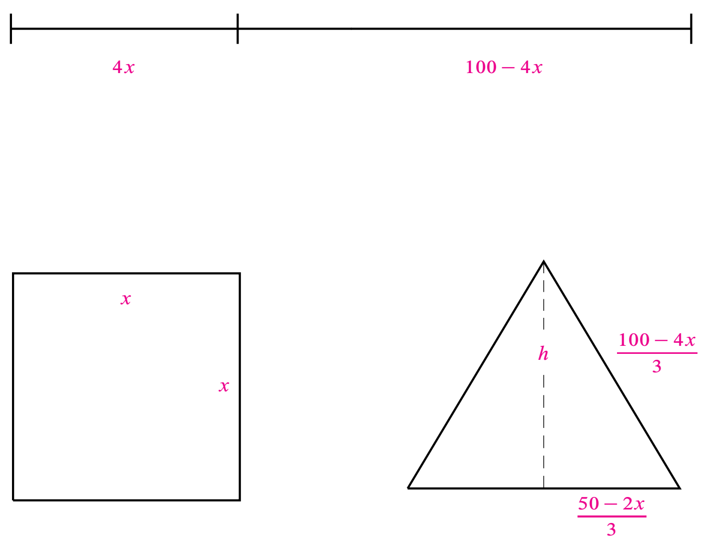
Por último el costo de la construcción como función de x es

$$C(x) = 200x^2 + 100x^2 + 400x\frac{12\,000}{x^2} = 300x^2 + \frac{4\,800\,000}{x}.$$

□

19. Un alambre de 100 cm de longitud se corta en dos partes. Una de ellas se dobla para formar un cuadrado y con la otra se forma un triángulo equilátero. Obtener el área de ambas figuras como función del lado del cuadrado.

▼ Usamos las siguientes figuras:



Llamemos x al lado del cuadrado (por lo que su área es $A_{\square} = x^2$); entonces una parte del alambre mide $4x$; la otra, la parte con la que vamos a formar un triángulo equilátero, mide $100-4x$. Cada lado de dicho triángulo medirá por lo tanto $\frac{100-4x}{3}$. Su altura , por el teorema de Pitágoras, es:

$$h = \sqrt{\frac{(100-4x)^2}{9} - \frac{(50-2x)^2}{9}} = \frac{\sqrt{10\,000 - 800x + 16x^2 - 2\,500 + 200x - 4x^2}}{3} =$$
$$= \frac{\sqrt{12x^2 - 600x + 7\,500}}{3} = \frac{\sqrt{12(x^2 - 50x + 625)}}{3} =$$
$$= \frac{\sqrt{4 \times 3(x-25)^2}}{3} = \frac{2\sqrt{3}\,|\,x-25\,|}{3} = \frac{2\,|\,x-25\,|}{\sqrt{3}}.$$

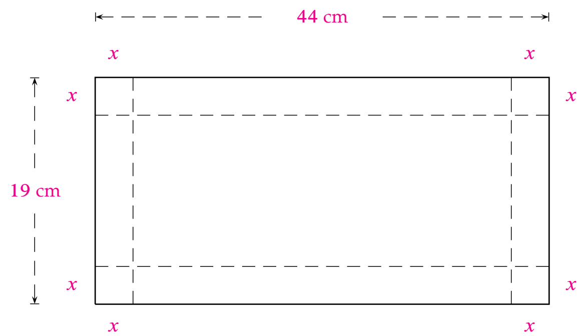
Y su área:

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2}\,\frac{100-4x}{3}\,\frac{2\,|\,x-25\,|}{\sqrt{3}} = \frac{(100-4x)(25-x)}{3\sqrt{3}}.$$

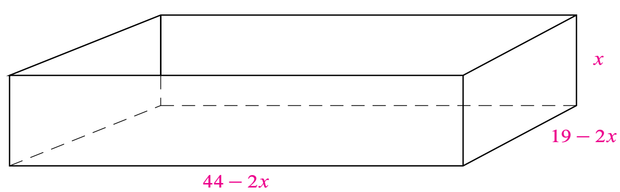
(Observe que $\sqrt{(x-25)^2} = |\,x-25\,| = 25-x$, pues $x \le 25$.)

□

20. De una pieza rectangular de cartón que mide 44 cm de largo y 19 cm de ancho se va a construir una caja sin tapa. Se cortarán 4 cuadrados de x cm de lado, como se muestra en la figura, y luego se doblará sobre las líneas punteadas para formar la caja. Exprese el volumen de esta caja como función de x.



▼ La caja se ve así:



Si a los 44 cm de largo le quitamos x cm de cada lado entonces queda una longitud igual a $44-2x$ cm.

Si a los 19 cm de ancho le quitamos x cm de cada lado entonces queda una longitud igual a $19-2x$ cm.

Al cortar los cuadraditos y doblar el cartón se obtiene una caja de altura x, anchura $19-2x$ y largo $44-2x$ cm.

Por lo tanto el volumen de la caja es:

$$V = x(19-2x)(44-2x)\ \text{cm}^3.$$

Es decir,

$$V(x) = 4x^3 - 126x^2 + 836x\ \text{cm}^3.$$

□

21. Considerando las escalas Celsius y Fahrenheit para medir temperaturas, se sabe que 0 °C corresponde a 32 °F y que 100 °C a 212 °F. Deducir la fórmula de transición de una escala a la otra, es decir expresar °C en función de °F, así como °F en función de °C.

▼ ¿Qué se pide en el problema? Primero deducir una fórmula o relación entre las dos escalas de medición, Celsius y Fahrenheit, para luego obtener un par de funciones: una que exprese °C en función de °F y otra que exprese °F en función de °C.

Considerando la temperatura que tiene cierto objeto al medirla con un termómetro Celsius se lee $T\,°\text{C} = T_{\text{C}}$ y con un termómetro Fahrenheit se lee una temperatura $T\,°\text{F} = T_{\text{F}}$.

En cada una de las escalas vemos la razón que existe entre la diferencia de temperaturas leída e inicial y la longitud de dicha escala.

En la escala Celsius la razón es:

$$\frac{T_C - 0\,°\mathrm{C}}{100\,°\mathrm{C} - 0\,°\mathrm{C}}.$$

y en la Fahrenheit dicha razón es:

$$\frac{T_F - 32\,°\mathrm{F}}{212\,°\mathrm{F} - 32\,°\mathrm{F}}.$$

Debido a que T_C y T_F son lecturas de la misma temperatura entonces las razones anteriores deben ser iguales; es decir

$$\frac{T_C}{100} = \frac{T_F - 32}{180}.$$

De aquí obtenemos T_C en función de T_F mediante

$$T_C = \frac{100}{180}(T_F - 32) = \frac{5}{9}(T_F - 32).$$

Así también obtenemos T_F en función de T_C mediante

$$T_F - 32 = \frac{180}{100}T_C \Rightarrow T_F = \frac{9}{5}T_C + 32.$$

□

22. Un viaje subsidiado por una escuela costará a cada estudiante 150 pesos si viajan no más de 150 estudiantes; sin embargo el costo a pagar por estudiante se reduciría 5 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 150. Exprese los ingresos brutos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.

▼ Si I es el ingreso bruto y n el número de estudiantes que van a viajar tenemos:

$$I(n) = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150 \\ [150 - 5(n-150)]n & \text{si } n > 150 \end{cases} = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150; \\ (150 - 5n + 750)n & \text{si } n > 150; \end{cases}$$

$$I(n) = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150 \\ (900 - 5n)n & \text{si } n > 150 \end{cases} = \begin{cases} 150n & \text{si } n \le 150; \\ (180 - n)5n & \text{si } n > 150. \end{cases}$$

Como se ve no se deberían aceptar más de 180 estudiantes pues si $n > 180 \Rightarrow 180 - n < 0$, los ingresos serían negativos. □

23. El costo de un viaje en taxi es de 4.80 pesos por el primer kilómetro (o parte del primer kilómetro) y de 30 centavos por cada 100 metros subsiguientes. Exprese el costo de un viaje como función de la distancia x recorrida (en kilómetros) para $0 < x < 2$; además grafique esa función.

▼ Considerando que 100 m = 0.1 km y que 30 centavos = \$0.30, se construye la tabla siguiente:

Recorrido en km	*Costo en pesos*
$0 < x < 1.1$	4.80
$1.1 \le x < 1.2$	$4.80 + 0.30 = 5.10$
$1.2 \le x < 1.3$	$5.10 + 0.30 = 5.40$
$1.3 \le x < 1.4$	$5.40 + 0.30 = 5.70$
$1.4 \le x < 1.5$	$5.70 + 0.30 = 6.00$
$1.5 \le x < 1.6$	$6.00 + 0.30 = 6.30$
$1.6 \le x < 1.7$	$6.30 + 0.30 = 6.60$
$1.7 \le x < 1.8$	$6.60 + 0.30 = 6.90$
$1.8 \le x < 1.9$	$6.90 + 0.30 = 7.20$
$1.9 \le x < 2$	$7.20 + 0.30 = 7.50$

La tabla anterior la podemos escribir de la siguiente forma:

Recorrido en km	*Costo en pesos*
$0 < x < 1.1$	4.80
$1 + 1(0.1) \le x < 1 + 2(0.1)$	$4.80 + 1(0.30)$
$1 + 2(0.1) \le x < 1 + 3(0.1)$	$4.80 + 2(0.30)$
$1 + 3(0.1) \le x < 1 + 4(0.1)$	$4.80 + 3(0.30)$
$1 + 4(0.1) \le x < 1 + 5(0.1)$	$4.80 + 4(0.30)$
$1 + 5(0.1) \le x < 1 + 6(0.1)$	$4.80 + 5(0.30)$
$1 + 6(0.1) \le x < 1 + 7(0.1)$	$4.80 + 6(0.30)$
$1 + 7(0.1) \le x < 1 + 8(0.1)$	$4.80 + 7(0.30)$
$1 + 8(0.1) \le x < 1 + 9(0.1)$	$4.80 + 8(0.30)$
$1 + 9(0.1) \le x < 1 + 10(0.1)$	$4.80 + 9(0.30)$

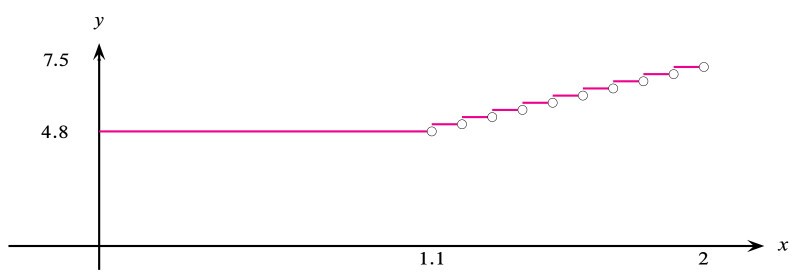
Una forma simplificada de las tablas anteriores es:

Recorrido en km	*Costo en pesos*	
$1 + n(0.1) \le x < 1 + (n+1)(0.1)$	$4.80 + n(0.30)$	donde $1 \le n \le 9$

De la tabla anterior vemos que, el costo C en pesos como función del recorrido x en kilómetros es:

$$C(x) = 4.80 + n(0.30) \text{ si } 1 + n(0.1) \le x < 1 + (n+1)(0.1).$$

La gráfica de esta función es la siguiente:



□

CAPÍTULO

3

Límite de una función

3.1 Introducción

Ejercicios 3.1.1

1. Sean $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ así como $x_0 = 3$.

   ¿Qué se puede decir acerca de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$?

   ▼ Primero notamos que $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ es una función que no está definida para $x = 3$.

   Luego observamos que para $(x - 3) \neq 0$, o sea, para $x \neq 3$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3} = x + 1.$$

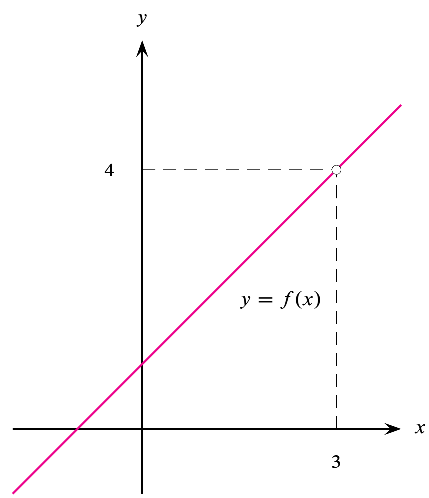
   Ahora damos a x valores cada vez más cercanos a $x_0 = 3$ y obtenemos las imágenes $f(x)$ respectivas.

x	$f(x) = x + 1$
2.9	3.9
2.99	3.99
2.999	3.999
2.9999	3.9999
2.99999	3.99999
$\downarrow$	$\downarrow$
3^-	4

x	$f(x) = x + 1$
3.1	4.1
3.01	4.01
3.001	4.001
3.0001	4.0001
3.00001	4.00001
$\downarrow$	$\downarrow$
3^+	4

Notamos que si x está cerca de 3, entonces $f(x)$ está cerca de 4, por lo que $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$. Esto es, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = 4$.

La gráfica correspondiente es:



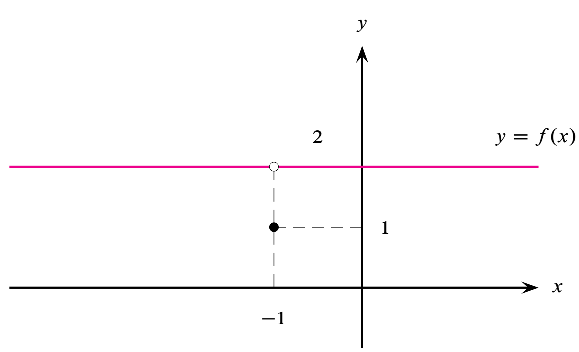
□

2. Dada $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq -1; \\ 1 & \text{si } x = -1. \end{cases}$

¿Existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$?

▼ Si $x \neq -1$, entonces $f(x) = 2$, por lo que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$, pues para cualquier x cerca de -1, diferente de -1, $f(x)$ está cerquísima de 2, de hecho $f(x) = 2$, esto es, su distancia a 2 es 0. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ sí existe.

Geométricamente se tiene



□

3. Sean $g(x) = \dfrac{x - 4}{|\, x - 4\,|}$ así como $x_0 = 4$.

¿Qué puede decir acerca de $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$?

▼ Ya que,

$$|\, x - 4\,| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x - 4 \geq 0 \\ -(x - 4) & \text{si } x - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \geq 4; \\ -(x - 4) & \text{si } x < 4; \end{cases}$$

entonces,

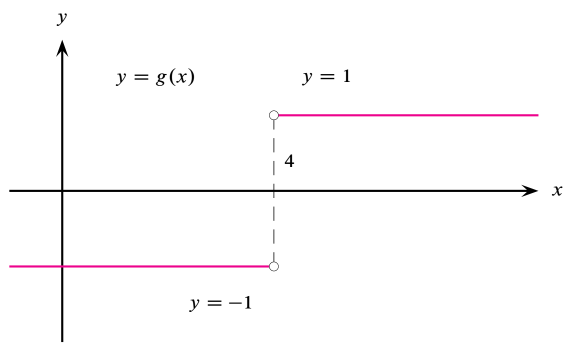
$$x < 4 \Rightarrow g(x) = \frac{x-4}{|\,x-4\,|} = \frac{x-4}{-(x-4)} = -1;$$
$$x > 4 \Rightarrow g(x) = \frac{x-4}{|\,x-4\,|} = \frac{x-4}{x-4} = 1.$$

Por lo tanto

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 4; \\ 1 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Es claro entonces que no existe $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$, pues si x está cerca de 4, $g(x)$ puede estar cerca de 1 o bien de -1 dependiendo si $x > 4$ o bien si $x < 4$ respectivamente, por lo que $g(x)$ no está cerca de un único número.

Geométricamente se tiene



□

4. Sean $\phi(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ y también $a = -1$.

¿Existe $\lim\limits_{x \to a} \phi(x)$?

▼ Notemos que $\phi(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ es una función que no esta definida en $x = -1$. Notemos también que para $(x+1) \neq 0$, o sea, para $x \neq -1$,

$$\phi(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1.$$

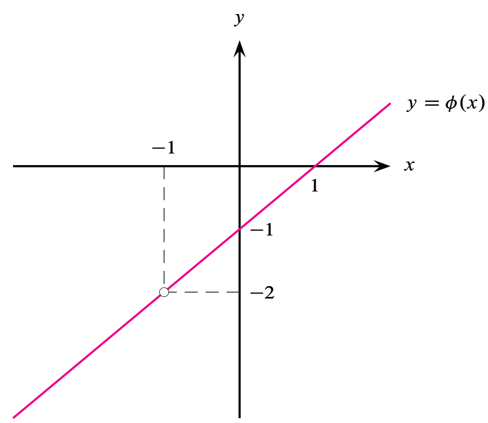
Asignamos a x valores cada vez más cercanos a -1 y obtenemos las imágenes $\phi(x)$ respectivas

x	$\phi(x) = x-1$
-1.1	-2.1
-1.01	-2.01
-1.001	-2.001
-1.0001	-2.0001
-1.00001	-2.00001
$\downarrow$	$\downarrow$
-1^-	-2

x	$\phi(x) = x-1$
-0.9	-1.9
-0.99	-1.99
-0.999	-1.999
-0.9999	-1.9999
-0.99999	-1.99999
$\downarrow$	$\downarrow$
-1^+	-2

Es claro entonces que $\lim_{x\to -1} \phi(x) = -2$, pues para valores de x cada vez más próximos a -1, $\phi(x)$ está cada vez más próximo a -2. Por lo tanto $\lim_{x\to -1} \phi(x)$ sí existe.

Geométricamente tenemos



□

5. Dada $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 < x < 0; \\ 1 & \text{si } x = 0; \\ 3x & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$

¿Existe $\lim_{x\to 0} h(x)$?

▼ Notemos que $h(x)$ está definida de diferente manera para $x < 0$ y para $x > 0$.

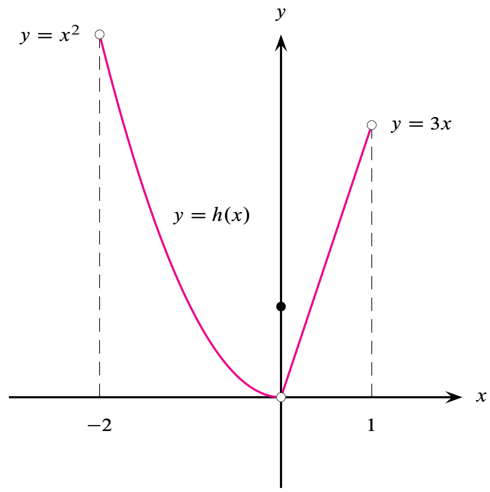
Damos a x valores cada vez más cercanos al cero, por ambos lados, y obtenemos las imágenes $h(x)$ correspondientes.

x	$h(x) = x^2$
−0.1	0.01
−0.01	0.0001
−0.001	0.000001
−0.0001	0.00000001
−0.00001	0.0000000001
↓	↓
0^-	0

x	$h(x) = 3x$
0.1	0.3
0.01	0.03
0.001	0.003
0.0001	0.0003
0.00001	0.00003
↓	↓
0^+	0

Podemos decir entonces que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$, pues si x está cada vez más cerca de 0, $h(x)$ está cada vez más cerca de 0.

Geométricamente tenemos



□

6. ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$?

▼ Notemos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no está definida en $x = 0$.

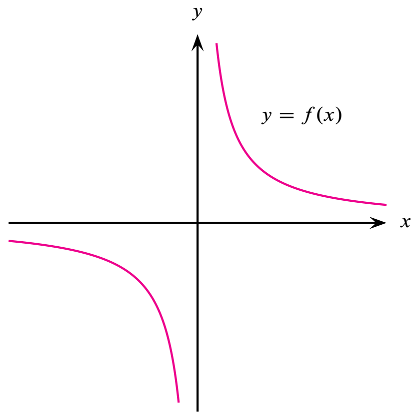
Damos a x valores cada vez más cercanos a cero y obtenemos las imágenes $f(x)$ correspondientes.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	$-1\,000$
-0.0001	$-10\,000$
-0.00001	$-100\,000$
$\downarrow$	$\downarrow$
0^-	Números negativos con valor absoluto cada vez mayor

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
0.1	10
0.01	100
0.001	$1\,000$
0.0001	$10\,000$
0.00001	$100\,000$
$\downarrow$	$\downarrow$
0^+	Números cada vez más grandes

Cuando x está cerca de 0, $f(x)$ no está cerca de número alguno, por lo tanto decimos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Gráficamente se tiene



□

3.2 Álgebra de límites

Ejercicios 3.2.1

I. *Considerando que* $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -8$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 0$ *y que* $\lim\limits_{x\to 2} \phi(x)$ *no existe, calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 2} [g(x) - f(x)]$.

   ▼ $\lim\limits_{x\to 2} [g(x) - f(x)] = \lim\limits_{x\to 2} g(x) - \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 - (-8) = 4 + 8 = 12.$ □

2. $\lim\limits_{x\to 2} [f(x) \cdot g(x)]$.

   ▼ $\lim\limits_{x\to 2} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to 2} g(x)\right] = (-8)(4) = -32.$ □

3. $\lim\limits_{x\to 2} [f(x) + \phi(x)]$.

   ▼ $\lim\limits_{x\to 2} [f(x) + \phi(x)]$ no existe, pues si existiera entonces también existiría $\lim\limits_{x\to 2} \phi(x)$ y de hecho $\lim\limits_{x\to 2} \phi(x) = \lim\limits_{x\to 2} \{[f(x) + \phi(x)] - f(x)\} = \lim\limits_{x\to 2} [f(x) + \phi(x)] - \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} [f(x) + \phi(x)] - 8.$ □

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

   ▼ $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{g(x)}{f(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{\lim\limits_{x\to 2} f(x)} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}.$ □

5. $\lim\limits_{x\to 2} \left[f^2(x) - g^3(x)\right]$.

   ▼
   $$\lim_{x\to 2} \left[f^2(x) - g^3(x)\right] = \lim_{x\to 2} [f(x)]^2 - \lim_{x\to 2} [g(x)]^3 =$$
   $$= \left[\lim_{x\to 2} f(x)\right]^2 - \left[\lim_{x\to 2} g(x)\right]^3 = (-8)^2 - (4)^3 = 64 - 64 = 0.$$

   □

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)}$.

   ▼ $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{f(x)h(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} [f(x)h(x)]}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = \dfrac{\left[\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to 2} h(x)\right]}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = \dfrac{(-8)(0)}{4} = \dfrac{0}{4} = 0.$ □

7. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

▼ Ya que $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{g(x)}{h(x)}\right] \neq \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{\lim\limits_{x\to 2} h(x)}$ y se afirma que $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{g(x)}{h(x)}\right]$ no existe. □

8. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\sqrt{g(x)} + \sqrt[3]{f(x)}\right]$.

▼
$$\lim_{x\to 2} \left[\sqrt{g(x)} + \sqrt[3]{f(x)}\right] = \lim_{x\to 2} \sqrt{g(x)} + \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 2} g(x)} + \sqrt[3]{\lim_{x\to 2} f(x)} =$$
$$= \sqrt{4} + \sqrt[3]{-8} = 2 + (-2) = 0.$$

□

9. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^5$.

▼ $$\lim_{x\to 2} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^5 = \left(\lim_{x\to 2} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)^5 = \left(\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}\right)^5 = \left(\frac{-8}{4}\right)^5 = (-2)^5 = -32.$$ □

10. $\lim\limits_{x\to 2} \left[h(x)\sqrt{f(x)}\right]$.

▼ Ya que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -8$ & $\sqrt{-8}$ no es un número real, entonces $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ no existe.

Por lo que, $\lim\limits_{x\to 2} \left[h(x)\sqrt{f(x)}\right]$ no existe. □

II. *Calcular los límites siguientes:*

1. $\lim\limits_{x\to 4} (-x^2 - 9x - 8)$.

▼
$$\lim_{x\to 4} (-x^2 - 9x - 8) = \lim_{x\to 4} -x^2 - \lim_{x\to 4} 9x - \lim_{x\to 4} 8 = -(\lim_{x\to 4} x)^2 - 9(\lim_{x\to 4} x) - 8 =$$
$$= -(4)^2 - 9(4) - 8 = -16 - 36 - 8 = -60.$$

□

2. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 2x + 1}$.

▼
$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4 - 2x + 1} = \sqrt{\lim_{x\to -2} (x^4 - 2x + 1)} = \sqrt{\lim_{x\to -2} x^4 - \lim_{x\to -2} 2x + \lim_{x\to -2} 1} =$$
$$= \sqrt{(\lim_{x\to -2} x)^4 - 2(\lim_{x\to -2} x) + 1} = \sqrt{(-2)^4 - 2(-2) + 1} =$$
$$= \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}.$$

□

3. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+1}{-x^2+8x-3}$.

▼

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2-3x+1}{-x^2+8x-3} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}(x^2-3x+1)}{\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}(-x^2+8x-3)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right)+1}{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right)-3} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1}{-\frac{1}{4}+\frac{8}{2}-3} =$$

$$= \frac{\frac{1-6+4}{4}}{\frac{-1+16-12}{4}} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

□

4. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$.

▼

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 = \left(\lim_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 = \left(\sqrt{\lim_{x\to 1}x}+\frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to 1}x}}\right)^5 =$$

$$= \left(\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^5 = (1+1)^5 = 2^5 = 32.$$

□

5. $\displaystyle\lim_{x\to 6}\left[(x+4)^3(x-5)^2\right]$.

▼

$$\lim_{x\to 6}\left[(x+4)^3(x-5)^2\right] = \left[\lim_{x\to 6}(x+4)\right]^3\left[\lim_{x\to 6}(x-5)\right]^2 = (6+4)^3(6-5)^2 =$$

$$= 10^3\cdot 1 = 1\,000.$$

□

6. $\displaystyle\lim_{x\to -1}(4x^3+3x^2-2x-1)$.

▼

$$\lim_{x\to -1}(4x^3+3x^2-2x-1) = 4(-1)^3+3(-1)^2-2(-1)-1 =$$

$$= -4+3+2-1 = 0.$$

□

7. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}(x^3-x^2-x+1)$.

▼

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(x^3-x^2-x+1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)+1 = \frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1 =$$

$$= \frac{1-2-4+8}{8} = \frac{3}{8}.$$

□

8. $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}(3-4x+5x^2)$.

▼
$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}(3-4x+5x^2) = 3-4\left(\frac{2}{3}\right)+5\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3-\frac{8}{3}+\frac{20}{9} = $$
$$= \frac{27-24+20}{9} = \frac{23}{9}.$$

□

9. $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-2)^5$.

▼ $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-2)^5 = [3(0)^2-2]^5 = (-2)^5 = -32.$ □

10. $\lim\limits_{x\to -3}(6-x^2)^4$.

▼ $\lim\limits_{x\to -3}(6-x^2)^4 = [6-(-3)^2]^4 = (6-9)^4 = (-3)^4 = 81.$ □

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-4x+5}{6x^2-7x+8}$.

▼ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-4x+5}{6x^2-7x+8} = \dfrac{3(0)^2-4(0)+5}{6(0)^2-7(0)+8} = \dfrac{5}{8}.$ □

12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+2}{x^2+4}$.

▼ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+2}{x^2+4} = \dfrac{3(-2)+2}{(-2)^2+4} = \dfrac{-6+2}{4+4} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2}.$ □

13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

▼ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1} = \dfrac{(-1)^3+1}{(-1)^2+1} = \dfrac{-1+1}{1+1} = \dfrac{0}{2} = 0.$ □

14. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)^3}{(4x^2+1)^5}$.

▼
$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)^3}{(4x^2+1)^5} = \frac{\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right]^3}{\left[4\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1\right]^5} = \frac{(-1-1)^3}{(1+1)^5} = $$
$$= \frac{(-2)^3}{(2)^5} = \frac{-2^3}{2^5} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}.$$

□

III. *Calcular los límites siguientes:*

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

▼ $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+2} =$$
$$= \frac{-1-1}{-1+2} = \frac{-2}{1} = -2.$$

□

2. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$.

▼ $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x} =$$
$$= \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

□

3. $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25}$.

▼ $$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-25} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x\to 5}\frac{x-2}{x+5} =$$
$$= \frac{5-2}{5+5} = \frac{3}{10}.$$

□

4. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{6x^2-3x^3}$.

▼ $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{6x^2-3x^3} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{-3x^2(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{-3x^2} =$$
$$= \frac{(2)^2+2(2)+4}{-3(2)^2} = \frac{12}{-12} = -1.$$

□

5. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

▼ $$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \lim_{x\to a}\frac{x-1}{x^2+ax+a^2} =$$
$$= \frac{a-1}{a^2+a(a)+a^2} = \frac{a-1}{3a^2}, \text{ para } a \neq 0.$$

□

6. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x^2+2}{x^4+2x^2-3}$.

▼ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x^2+2}{x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2-2)}{(x^2-1)(x^2+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2}{x^2+3}=$$
$$=\frac{(1)^2-2}{(1)^2+3}=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}.$$

□

7. $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$.

▼ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{(1+1)(1^2+1)}{1^2+1+1}=\frac{2(2)}{3}=\frac{4}{3}.$$

□

8. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

▼ $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

También se puede calcular observando que

$$x-2=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2=(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2}),$$

por lo que

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})1}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

y de aquí que

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

□

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

▼ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1.$$

□

10. $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

▼

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\left[\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\times\frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{2^2-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 7}\frac{4-x+3}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 7}\frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$$
$$=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\frac{-1}{(14)(2+\sqrt{4})}=-\frac{1}{56}.$$

□

11. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

▼ $$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 4}\left[\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\times\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{1^2-(5-x)}=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})}{1-5+x}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\left[\frac{(1+\sqrt{5-x})(3-\sqrt{5+x})}{x-4}\times\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{(1+\sqrt{5-x})[3^2-(5+x)]}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(1+\sqrt{5-x})(4-x)}{(x-4)(3+\sqrt{5+x})}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{-(1+\sqrt{5-x})}{(3+\sqrt{5+x})}=-\frac{1+\sqrt{5-4}}{3+\sqrt{5+4}}=-\frac{1+1}{3+3}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

□

12. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

▼ $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}\times\frac{(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}{(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2}\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h})^3-(\sqrt[3]{x})^3}{h[(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h[(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h[(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2]} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2+\sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2} =$$
$$= \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{x}+(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ \text{para } x\neq 0.$$

□

13. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

▼

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}\times\frac{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}{\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}}\right] =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x^2-2x+6)-(x^2+2x-6)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+6-x^2-2x+6}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-4x+12}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$
$$= \lim_{x\to 3}\frac{-4}{(x-1)(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6})} =$$
$$= \frac{-4}{2(\sqrt{9-6+6}+\sqrt{9+6-6})} = \frac{-2}{3+3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

□

14. $\lim_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

▼ Para resolver este límite se puede considerar que $\sqrt[3]{x}=y$, entonces $x=y^3$; además cuando $x\to 8$, sucede que $y\to\sqrt[3]{8}=2$.

Luego,

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{y\to 2}\frac{y^3-8}{y-2} = \lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)} = \lim_{y\to 2}(y^2+2y+4) =$$
$$= 2^2+2(2)+4 = 12.$$

O haciéndolo directamente

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)[(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4]}{\sqrt[3]{x}-2}=$$
$$=\lim_{x\to 8}[(\sqrt[3]{x})^2+2\sqrt[3]{x}+4]=(\sqrt[3]{8})^2+2\sqrt[3]{8}+4=2^2+2(2)+4=$$
$$=4+4+4=12.$$

□

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

▼ Si $\sqrt{x}=y$, entonces $x=y^2$; además cuando $x\to 1$, sucede que $y\to\sqrt{1}=1$.

Luego,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{y\to 1}\left(\frac{y-1}{y^2-1}\right)=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\,.$$

O haciéndolo directamente:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\,.$$

□

16. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

▼ Para eliminar tanto a la raíz cuadrada como a la cúbica, obtenemos el mínimo común múltiplo de los índices 2 y 3, que es 6, y proponemos que x sea y^6.

Si $x=y^6$, entonces $y=\sqrt[6]{x}$; además cuando $x\to 64$, sucede que $y\to\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$.

Luego,

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}=\lim_{y\to 2}\frac{\sqrt{y^6}-8}{\sqrt[3]{y^6}-4}=\lim_{y\to 2}\left(\frac{y^3-2^3}{y^2-2^2}\right)=\lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y^2+2y+2^2)}{(y-2)(y+2)}=$$
$$=\lim_{y\to 2}\frac{y^2+2y+4}{y+2}=\frac{4+4+4}{2+2}=\frac{12}{4}=3.$$

□

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

▼ Para eliminar a las dos raíces, obtenemos el mínimo común múltiplo de los índices 3 y 4, que es 12 y proponemos que $x=y^{12}$.

Si $x=y^{12}$, entonces $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{y^{12}}=y^4$ & $\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{y^{12}}=y^3$; además $y=\sqrt[12]{x}\to 1$ cuando $x\to 1$.

Luego,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{y\to 1}\left(\frac{y^4-1}{y^3-1}\right)=\lim_{y\to 1}\frac{(y^2-1)(y^2+1)}{(y-1)(y^2+y+1^2)}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)(y+1)(y^2+1)}{(y-1)(y^2+y+1)}=$$
$$=\lim_{y\to 1}\frac{(y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1}=\frac{(1+1)(1^2+1)}{1^2+1+1}=\frac{4}{3}\,.$$

□

18. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3}$.

▼ Racionalicemos el numerador y factoricemos el denominador

$$\frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3}=\frac{(\sqrt{3x+1}-2x)(\sqrt{3x+1}+2x)}{(x+3)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)}=\frac{3x+1-4x^2}{(x+3)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)}.$$

Ya que $x=1$ es raíz de $-4x^2+3x+1$, entonces $x-1$ es un divisor de este trinomio

$$\begin{array}{r|l} & -4x-1 \\ \hline x-1 & -4x^2+3x+1 \\ & \underline{+4x^2-4x} \\ & \quad -x+1 \\ & \quad \underline{+x-1} \\ & \qquad 0 \end{array}.$$

Luego, $-4x^2+3x+1=(x-1)(-4x-1)$, por lo cual

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x^2+2x-3}&=\lim_{x\to 1}\frac{3x+1-4x^2}{(x+3)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)}=\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-4x-1)}{(x+3)(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)}=\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-4x-1}{(x+3)(\sqrt{3x+1}+2x)}=\\&=\frac{-4-1}{(1+3)(\sqrt{3+1}+2)}=\frac{-5}{4(2+2)}=-\frac{5}{16}.\end{aligned}$$

□

19. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x}$.

▼ Observamos que

$$\frac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x}=\frac{x(x^2-3x-5)}{x(x-7)}$$

y, si $x\neq 0$, entonces,

$$\frac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x}=\frac{x^2-3x-5}{x-7},$$

por lo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2-5x}{x^2-7x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x-5}{x-7}=\frac{-5}{-7}=\frac{5}{7}.$$

□

20. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}$.

▼ Observamos

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}&=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}\times\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}=\\&=\frac{(x+2)-(6-x)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\\&=\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}},\quad \text{si } x\neq 2, \text{ o sea, } x-2\neq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}=\frac{2}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\,.$$

□

21. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$.

▼ Un poco de álgebra

$$\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}=\frac{x^2+x+1-3}{x^3-1}=\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=$$
$$=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{x+2}{x^2+x+1}\ \text{si } x\neq 1\,.$$

Luego

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1\,.$$

□

22. $\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14}$.

▼ Aquí usamos que

$$3x^2+x-14=0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{6}=\frac{-1+\sqrt{169}}{6}=\frac{-1\pm 13}{6}\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ x=\begin{cases}2\\ \dfrac{-14}{6}=-\dfrac{7}{3}\,.\end{cases}$$

Por lo que

$$3x^2+x-14=3\left(x^2+\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}\right)=3\left(x+\frac{7}{3}\right)(x-2)=(3x+7)(x-2)\,.$$

Racionalizando el numerador tenemos:

$$\frac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14}=\frac{4x^2-(-12x+40)}{(3x^2+x-14)(2x+\sqrt{-12x+40})}=$$
$$=\frac{4x^2+12x-40}{(3x+7)(x-2)(2x+\sqrt{-12x+40})}=\frac{4(x^2+3x-10)}{(3x+7)(x-2)(2x+\sqrt{-12x+40})}=$$
$$=\frac{4(x+5)(x-2)}{(3x+7)(x-2)(2x+\sqrt{-12x+40})}=\frac{4(x+5)}{(3x+7)(2x+\sqrt{-12x+40})}\,.$$

Como $x\neq 2$, entonces $x-2\neq 0$.

Por último

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-\sqrt{-12x+40}}{3x^2+x-14}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x+5)}{(3x+7)(2x+\sqrt{-12x+40})}=$$
$$=\frac{4\times 7}{13\times 8}=\frac{7}{26}\,.$$

□

23. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1}-1}{h}$.

▼ Vemos que, al racionalizar:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h+1}-1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h+1-1}{h(\sqrt{h+1}+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{2} .$$

□

24. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$.

▼ Racionalizando el numerador

$$\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} \text{ si } x-3 \neq 0, \text{ esto es si } x \neq 3.$$

Por lo que

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4} .$$

□

25. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$.

▼ Efectuemos la operación, recordando que $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$:

$$\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} = \frac{(x^2+2x+4)-12}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)} =$$
$$= \frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} .$$

Entonces,

$$\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} = \frac{x+4}{x^2+2x+4} \text{ si } (x-2) \neq 0, \text{ esto es si } x \neq 2 ,$$

por lo que

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} .$$

□

26. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{2x^3-16}{-3x^2+8x-4}$.

▼ Como

$$-3x^2+8x-4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{-6} = \frac{4}{3} \mp \frac{2}{3} = \begin{cases} \frac{2}{3}; \\ 2 , \end{cases}$$

tenemos que

$$-3x^2+8x-4 = -3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-2) = -(3x-2)(x-2)$$

y que

$$2x^3 - 16 = 2(x^3-8) = 2(x^3-2^3) = 2(x-2)(x^2+2x+4).$$

Siendo así,

$$\frac{2x^3-16}{-3x^2+8x-4}=\frac{2(x-2)(x^2+2x+4)}{-(3x-2)(x-2)}=\frac{2(x^2+2x+4)}{-(3x-2)} \text{ si } (x-2)\neq 0\text{, esto es, si } x\neq 2)$$

y entonces,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-16}{-3x^2+8x-4}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x^2+2x+4)}{-(3x-2)}=$$
$$=\frac{2[2^2+(2\times 2)+4]}{-[(3\times 2)-2]}=\frac{2(4+4+4)}{-(6-2)}=\frac{2\times 12}{-4}=-6.$$

□

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$.

▼ Racionalicemos el numerador multiplicando a él y al denominador por el binomio conjugado de $\sqrt{2+x}-\sqrt{2}$ que es $\sqrt{2+x}+\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\frac{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})(\sqrt{2+x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})x}=\frac{2+x-2}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=$$
$$=\frac{x}{x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}} \text{ si } x\neq 0.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

□

28. $\displaystyle\lim_{x\to \frac{2}{3}}\frac{\sqrt{9x+19}-6x-1}{6x^2-19x+10}$.

▼ Racionalicemos el numerador

$$\frac{(\sqrt{9x+19}-6x-1)(\sqrt{9x+19}+6x+1)}{(6x^2-19x+10)(\sqrt{9x+19}+6x+1)}=\frac{(\sqrt{9x+19})^2-(6x+1)^2}{(6x^2-19x+10)(\sqrt{9x+19}+6x+1)}=$$
$$=\frac{9x+19-36x^2-12x-1}{(6x^2-19x+10)(\sqrt{9x+19}+6x+1)}=$$
$$=\frac{-36x^2-3x+18}{(6x^2-19x+10)(\sqrt{9x+19}+6x+1)}.$$

Observemos que

$$-36x^2-3x+18=0 \Leftrightarrow -3(12x^2+x-6)=0 \Leftrightarrow 12x^2+x-6=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+288}}{24}=\frac{-1\pm\sqrt{289}}{24}=\frac{-1\pm 17}{24}=\begin{cases}\frac{2}{3};\\ -\frac{3}{4},\end{cases}$$

por lo cual

$$-36x^2-3x+18=-3\times 12\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)=-3\times 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(4x+3).$$

Además

$$6x^2 - 19x + 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 240}}{12} = \frac{19 \pm \sqrt{121}}{12} = \frac{19 \pm 11}{12} = \begin{cases} \dfrac{5}{2}; \\ \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Por lo que $6x^2 - 19x + 10 = 6\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$. De aquí que:

$$\frac{-36x^2 - 3x + 18}{(6x^2 - 19x + 10)(\sqrt{9x + 19} + 6x + 1)} = \frac{-9\left(x - \frac{2}{3}\right)(4x + 3)}{6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)(\sqrt{9x + 19} + 6x + 1)} =$$

$$= \frac{-9(4x + 3)}{6\left(x - \frac{5}{2}\right)(\sqrt{9x + 19} + 6x + 1)} = \frac{-3(4x + 3)}{2\left(x - \frac{5}{2}\right)(\sqrt{9x + 19} + 6x + 1)}$$

si $x \neq \frac{2}{3}$ y entonces,

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{9x + 19} - 6x - 1}{6x^2 - 19x + 10} = \lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{-3(4x + 3)}{2\left(x - \frac{5}{2}\right)(\sqrt{9x + 19} + 6x + 1)} =$$

$$= \frac{-3\left(\frac{8}{3} + 3\right)}{2\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2}\right)(\sqrt{6 + 19} + 4 + 1)} = \frac{-3\left(\frac{17}{3}\right)}{2\left(\frac{-11}{6}\right)(5 + 5)} = \frac{-17}{\frac{-22}{3}(5)} = \frac{51}{110}.$$

□

29. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1}$.

▼ Tenemos

$$\lim_{x \to 1} \frac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \left(\frac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1} \times \frac{4 + \sqrt{x + 15}}{4 + \sqrt{x + 15}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{16 - (x + 15)}{(x^2 - 1)(4 + \sqrt{x + 15})} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{(x - 1)(x + 1)(4 + \sqrt{x + 15})} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(4 + \sqrt{x + 15})};$$

como $x \neq 1$, entonces cancelamos $(x - 1)$ y obtenemos

$$\lim_{x \to 1} \frac{4 - \sqrt{x + 15}}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x + 1)(4 + \sqrt{x + 15})} = \frac{-1}{(1 + 1)(4 + \sqrt{1 + 15})} = \frac{-1}{2(4 + 4)} = -\frac{1}{16}.$$

□

30. $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6}$.

▼ Puesto que

$$\frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x^3 + 2^3}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x + 3)} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 3} \text{ si } x + 2 \neq 0, \text{ es decir, si } x \neq -2.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{x+3}=\frac{4+4+4}{-2+3}=\frac{12}{1}=12.$$

□

31. $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}$.

▼ Observamos que

$$2x^2+5x-3=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{-5\pm 7}{4}=\begin{cases}\dfrac{1}{2};\\ -3.\end{cases}$$

Por lo que

$$2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3)\,.$$

Luego,

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2-2x-15}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(2x-1)}{(x+3)(x-5)}=\lim_{x\to -3}\frac{2x-1}{x-5}=\frac{2(-3)-1}{-3-5}=\frac{-7}{-8}=\frac{7}{8}\,.$$

□

32. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

▼ Encontramos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\\ &=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \text{para } x>0.\end{aligned}$$

□

33. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}$.

▼ Si tratamos de calcular el límite por evaluación obtenemos:

$$\frac{(1)^2-1}{(1)^2-1}=\text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”},\ \text{una indeterminación “}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Esto nos dice que los polinomios del numerador y del denominador, ambos, tienen la raíz común $x=1$. En este caso es fácil encontrar la factorización del factor común $x-1$:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x+1}\,.$$

La igualdad anterior se cumple para $x\neq 1$. Por lo tanto podemos usar este hecho para calcular el límite.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\,.$$

□

34. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1}$.

▼ Si tratamos de calcular el límite evaluando la expresión obtenemos:

$$\frac{3(1)^2 + 4(1) - 7}{(1)^2 - 1} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{ una indeterminación } \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Por tratarse de una función racional este resultado nos invita a factorizar el numerador y el denominador, sabiendo que ambos polinomios tienen el factor $x - 1$.

Para el denominador el resultado es: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

Para el numerador efectuamos la división

$$\begin{array}{r|l} & 3x + 7 \\ \hline x - 1 & 3x^2 + 4x - 7 \\ & \underline{-3x^2 + 3x} \\ & \qquad 7x - 7 \\ & \qquad \underline{-7x + 7} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}.$$

O sea que la factorización del numerador es $3x^2 + 4x - 7 = (x - 1)(3x + 7)$.

Con estos resultados obtenemos:

$$\frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(3x + 7)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{3x + 7}{x + 1}.$$

Ahora sí podemos calcular el límite usando esta última expresión equivalente a la primera, para $x \neq 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x + 7}{x + 1} = \frac{3(1) + 7}{1 + 1} = \frac{10}{2} = 5.$$

□

35. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 1}{-\sqrt{x + 4} + 2}$.

▼ Si tratamos de calcular el límite por evaluación, resulta para $x = 0$:

$$\frac{\sqrt{0 + 1} - 1}{-\sqrt{0 + 4} + 2} = \frac{1 - 1}{-2 + 2} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{ una indeterminación de la forma } \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Racionalizamos el numerador:

$$\frac{\sqrt{x + 1} - 1}{-\sqrt{x + 4} + 2} = \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{-\sqrt{x + 4} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} + 1} =$$
$$= \frac{(x + 1) - 1}{(\sqrt{x + 1} + 1)(2 - \sqrt{x + 4})} = \frac{x}{(\sqrt{x + 1} + 1)(2 - \sqrt{x + 4})}.$$

Si tratamos de evaluar obtenemos de nuevo una indeterminación de la forma “$\left(\dfrac{0}{0}\right)$”.

Ahora racionalizamos el denominador:

$$\frac{x}{(\sqrt{x+1}+1)(2-\sqrt{x+4})}\cdot\frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}=$$
$$=\frac{x(2+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+1}+1)[4-(x+4)]}=\frac{x(2+\sqrt{x+4})}{(\sqrt{x+1}+1)(-x)}=-\frac{2+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}+1}\,.$$

Podemos ya calcular el límite usando esta expresión equivalente, para $x\neq 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{-\sqrt{x+4}+2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}+1}\right)=-\frac{2+2}{1+1}=-\frac{4}{2}=-2\,.$$

□

36. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1}$.

▼ Observamos que $x=1$ es una raíz de x^3-2x^2+2x-1, luego este último polinomio es divisible entre $x-1$ y efectuando esa división

$$\begin{array}{r|l} & x^2-x+1 \\ \hline x-1 & x^3-2x^2+2x-1 \\ & \underline{-x^3+x^2} \\ & \quad -x^2+2x-1 \\ & \quad \underline{x^2-x} \\ & \qquad x-1 \\ & \qquad \underline{-x+1}\,, \\ & \qquad\; 0 \end{array}$$

llegamos al resultado:

$$\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1}=x^2-x+1\,.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+2x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2-x+1)=1\,.$$

□

37. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x}-3\right)x$.

▼ Vemos que

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{4}{x}-3\right)x\right]=\lim_{x\to 0}(4-3x)=4-(3\times 0)=4-0=4\,.$$

□

38. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

▼ Racionalizando el denominador

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5}=\frac{x^3(\sqrt{x^2+25}+5)}{(\sqrt{x^2+25}-5)(\sqrt{x^2+25}+5)}=\frac{x^3(\sqrt{x^2+25}+5)}{x^2+25-25}=$$
$$=\frac{x^3(\sqrt{x^2+25}+5)}{x^2}=x(\sqrt{x^2+25}+5),\ \text{para } x\neq 0.$$

Por lo que hallamos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}-5}=\lim_{x\to 0}[x(\sqrt{x^2+25}+5)]=0.$$

□

39. Considere la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{13-x^2}-x-1}{x^2-5x+6}$.

a. Viendo la tabla de imágenes de f, calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ con dos cifras decimales exactas:

x	$f(x)$
1.997	1.66096
1.998	1.66286
1.999	1.66476
2	Indeterminado
2.001	1.66858
2.002	1.67049
2.003	1.67241

b. Calcule exactamente $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ usando la expresión algebraica de la función.
¿Cuál es la tercera cifra decimal exacta del valor del límite?

▼

a. Se puede afirmar que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1.66$.

b. Vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{13-x^2}-x-1}{x^2-5x+6}&=\frac{\sqrt{13-x^2}-(x+1)}{x^2-5x+6}\times\frac{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}=\\&=\frac{(13-x^2)-(x+1)^2}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}=\\&=\frac{13-x^2-(x^2+2x+1)}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}=\\&=\frac{-2x^2-2x+12}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}=\\&=-2\frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}=\\&=-2\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-3)}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}=\\&=-2\frac{x+3}{x-3}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}\ \text{(si } x-2\neq 0\text{, o sea, } x\neq 2).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x)&=\lim_{x\to 2}\left[-2\frac{x+3}{x-3}\times\frac{1}{\sqrt{13-x^2}+(x+1)}\right]\\&=-2\left(\frac{5}{-1}\right)\times\frac{1}{\sqrt{13-4}+(2+1)}=\frac{10}{6}=1.6667\,.\end{aligned}$$

¿Cuál es la tercera cifra decimal exacta del valor del límite?
Con lo anterior calculado podemos responder que 6 es la tercera cifra decimal del límite.

□

3.3 Límites laterales

Ejercicios 3.3.1

1. Dada $f(x) = \dfrac{|\,x\,|}{x}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

▼ Ya que, con $x \neq 0$,

$$|\,x\,| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0;\\ x & \text{si } x > 0,\end{cases}$$

entonces:

a. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|\,x\,|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(-1) = -1$;

b. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|\,x\,|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$;

c. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe debido a que: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

□

2. Dada $f(x) = \dfrac{x-a}{|\,x-a\,|}$, calcular:

   a. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$; b. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$; c. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

▼ Ya que con $x - a \neq 0$,

$$|\,x-a\,| = \begin{cases} -(x-a) & \text{si } x-a < 0\\ x-a & \text{si } x-a > 0\end{cases} = \begin{cases} -(x-a) & \text{si } x < a;\\ x-a & \text{si } x > a,\end{cases}$$

entonces:

a. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{x-a}{|\,x-a\,|} = \lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{x-a}{-(x-a)}\right] = \lim\limits_{x\to a}(-1) = -1$;

b. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{x-a}{|\,x-a\,|} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 1 = 1$;

c. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe debido a que: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

□

3. Dada $g(x) = |\, x-2\,| - x + 2$, calcular:

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$; b. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$; c. $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

▼ Ya que con $x - 2 \neq 0$,

$$|\, x-2\,| = \begin{cases} -(x-2) & \text{si } x-2<0 \\ x-2 & \text{si } x-2>0 \end{cases} \Rightarrow |\, x-2\,| = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x<2; \\ x-2 & \text{si } x>2, \end{cases}$$

entonces:

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (|\, x-2\,| - x + 2) = \lim\limits_{x\to 2}[(-x+2) - x + 2] =$

$= \lim\limits_{x\to 2}(-2x+4) = -2(2) + 4 = -4 + 4 = 0$;

b. $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (|\, x-2\,| - x + 2) = \lim\limits_{x\to 2}[(x-2) - x + 2] = \lim\limits_{x\to 2} 0 = 0$;

c. Ya que $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$.

□

4. Dada $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1; \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 2; \\ 2 - x & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Calcular:

a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; c. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$;

b. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; f. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

▼ Encontramos que:

a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (-2) = -2$;

b. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2 - 3) = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$;

c. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2$ ya que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -2$;

d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$;

e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2 - x) = 2 - 2 = 0$;

f. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe ya que: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

□

5. Dada la función $g(x) = \begin{cases} ax + 11 & \text{si } x < 3; \\ x^2 - 8x + 16 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

Determinar el valor de la constante a que asegura la existencia de $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

▼ Calculamos

$\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (ax + 11) = a(3) + 11 = 3a + 11$.

$\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (x^2 - 8x + 16) = 9 - 24 + 16 = 1$.

Luego:

$$\lim_{x\to 3} g(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^+} g(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3a + 11 = 1 \Leftrightarrow 3a = -10 \Leftrightarrow a = -\frac{10}{3}.$$

□

6. La expresión $L = L_o\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ indica la longitud de un objeto en función de su velocidad v, donde L_o es la longitud del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.
¿Qué pasa con la longitud del objeto cuando v se aproxima a la velocidad de la luz?

▼ En primer lugar observemos que $1 - \dfrac{v^2}{c^2}$ tiene que ser ≥ 0.

Entonces:

$$\frac{v^2}{c^2} \leq 1 \Rightarrow v^2 \leq c^2$$

y extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros, obtenemos

$$\sqrt{v^2} \leq \sqrt{c^2} \Rightarrow v = |v| \leq |c| = c\,.$$

Con lo cual la velocidad del objeto no puede ser mayor que la de la luz:

$$\lim_{v\to c^-} L = \lim_{v\to c^-} L_o\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_o \lim_{v\to c^-} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_o\sqrt{1 - \lim_{v\to c^-}\frac{v^2}{c^2}} = L_o\sqrt{1-1} = 0\,.$$

□

7. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,| - x}{x}$.

▼ Ya que $x \neq 0$, entonces $|\,x\,| = x$ para $x > 0$ y también que $|\,x\,| = -x$ para $x < 0$, entonces:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,| - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0\,;$$

y además

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,| - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -2 = -2\,.$$

No existe $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,| - x}{x}$ pues los límites laterales son distintos.

□

8. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{|\,x - 1\,|}$.

▼ Sabemos que $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y que $x - 1 \neq 0$; entonces:

$$|\,x - 1\,| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x - 1 > 0; \\ -(x-1) & \text{si } x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 1 \\ -(x-1) & \text{si } x < 1\,; \end{cases}$$

luego,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - 1}{|\,x - 1\,|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2$$

y también

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{|\,x - 1\,|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2\,.$$

Por lo que no existe $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{|\,x-1\,|}$, ya que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{|\,x-1\,|} \neq \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{|\,x-1\,|}\,.$$

□

9. Sea la función definida por

$$f(x) = n,\ \text{para cada } x \in [n, n+1),\ \text{donde } n \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}.$$

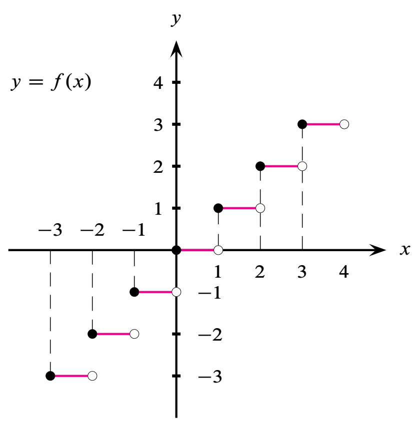
a. Grafique esa función f.

b. Calcular para $n \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}$.

$\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to n} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, donde $a \neq n$.

▼

a. La gráfica de la función f es:



b. Tenemos

$$\lim_{x\to n^-} f(x) = \lim_{x\to n^-} (n-1) = n-1\,;$$
$$\lim_{x\to n^+} f(x) = \lim_{x\to n^+} n = n\,.$$

Puesto que

$$\lim_{x\to n^-} f(x) \neq \lim_{x\to n^+} f(x), \text{ no existe } \lim_{x\to n} f(x)\,.$$

Por último

$$\lim_{x\to a} f(x) = n \text{ si } a \in (n, n+1)\,.$$

□

10. Considerar $f(x) = \begin{cases} x^2+3 & \text{si } x \leq 1; \\ x+1 & \text{si } x > 1; \end{cases}$ y considerar $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1; \\ 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Calcular:

a. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)g(x)$;

b. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)g(x)$;

c. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)g(x)$.

▼ Tenemos:

a. $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \times \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+3) \times \lim\limits_{x\to 1}(x^2) = 4 \times 1 = 4$, ya que ambos límites existen;

b. $\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \times \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) \times \lim\limits_{x\to 1}(2) = 2 \times 2 = 4$;

c. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)g(x)] = 4$, pues $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)g(x)] = 4$.

□

11. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$.

▼ Racionalicemos el numerador multiplicando al numerador y al denominador por la expresión conjugada $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1} = \frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} = \frac{2x+1-3}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} =$$
$$= \frac{2x-2}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})} = \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}} \text{ si } x \neq 1\,.$$

Obtenemos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

□

12. Calcular: $\lim\limits_{x\to 0}\left[|\,x\,|^3\left(x+1-\dfrac{2}{x}\right)\right]$.

▼ Como $|\,x\,|$ cambia de signo en 0, entonces $|\,x\,|^3$ cambia también de signo en 0.

Calculamos por separado

$$\lim_{x\to 0^+}\left[|x|^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[x^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0^+}(x^4+x^3-2x^2) = 0\,,$$

así como

$$\lim_{x\to 0^-}\left[|x|^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0^-}\left[(-x)^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)\right] = \lim_{x\to 0^-}(-x^4-x^3+2x^2) = 0\,.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0}\left[|\,x\,|^3\left(x+1-\frac{2}{x}\right)\right] = 0\,.$$

□

13. Calcular: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+1}{x^4+3} & \text{si } x < -1; \\[2mm] \dfrac{x^3+1}{x^2+6x+5} & \text{si } x > -1. \end{cases}$

▼ Debido a que $f(x)$ está definida de una manera cuando $x < -1$ y de forma diferente cuando $x > -1$, para calcular $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ procederemos a determinar los límites laterales.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+1}{x^4+3} = \frac{2(-1)^2+1}{(-1)^4+3} = \frac{2+1}{1+3} = \frac{3}{4}\,.$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+6x+5} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x+5)} =$$
$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x+5} = \frac{(-1)^2-(-1)+1}{-1+5} = \frac{1+1+1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Ya que $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{3}{4}$ & $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{3}{4}$, entonces los límites laterales son iguales por lo cual

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{3}{4}.$$

□

14. Calcular: $\lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{|\,x-2\,|}$.

▼ Si $x \to 2^+$, entonces $x > 2$; además

$$x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow |\,x-2\,| = x-2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2-x}{|\,x-2\,|} = \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} \frac{2-x}{|\,x-2\,|} = \lim_{x\to 2^+} (-1) = -1.$$

□

15. Calcular: $\lim_{x\to -3^-} \frac{|\,|\,2+x\,|-3\,|-2}{x^2-9}$.

▼ Si $x \approx -3 \Rightarrow 2+x \approx -1 < 0$ (el símbolo $\approx$ significa "aproximadamente igual"), entonces:

$$|\,2+x\,| = -2-x \;\&\; |\,2+x\,|-3 = -2-x-3 = -x-5.$$

Como $-x-5 \approx -2 < 0$, entonces $|\,|\,2+x\,|-3\,| = 3-|\,2+x\,| = 3-(-2-x) = 5+x$.
Y, por último, $|\,|\,2+x\,|-3\,|-2 = 5+x-2 = x+3$. Por lo que

$$\frac{|\,|\,2+x\,|-3\,|-2}{x^2-9} = \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3} \text{ si } x \neq -3.$$

De aquí que

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{|\,|\,2+x\,|-3\,|-2}{x^2-9} = \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-3-3} = -\frac{1}{6}.$$

□

3.4 Límites infinitos

Ejercicios 3.4.1

1. Para $f(x) = \frac{1}{x}$, calcular:

a. $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, b. $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, c. $\lim_{x\to 0} f(x)$.

▼ Cuando $x \to 0$, sabemos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} =$ "$\left(\frac{1}{0}\right)$" indeterminado. Debemos trabajar con límites laterales para determinar el comportamiento.

a. Si $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $\dfrac{1}{x} < 0$; por lo que $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} =$ "$\left(\dfrac{1}{0^-}\right)$" $= -\infty$.

b. Si $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ & $\dfrac{1}{x} > 0$; por lo que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} =$ "$\left(\dfrac{1}{0^+}\right)$" $= +\infty$.

c. Podemos decir que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe.

d. Además, se puede afirmar que la recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la curva $y = \dfrac{1}{x}$.

□

2. Para $f(x) = \dfrac{-3}{x+2}$, calcular:

a. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$, b. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, c. $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$.

▼ Cuando $x \to -2$ sucede que $(x+2) \to 0$ y sabemos que $\dfrac{-3}{x+2} \to \infty$ (sin signo).

Precisemos el signo.

a. Si $x \to -2^-$, entonces $x < -2$ & $x + 2 < 0$; por lo que $\dfrac{-3}{x+2} > 0$ & $\dfrac{-3}{x+2} \to +\infty$.

Luego, $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-3}{x+2} = +\infty$.

b. Si $x \to -2^+$, entonces $x > -2$ & $x + 2 > 0$; por lo que $\dfrac{-3}{x+2} < 0$ & $\dfrac{-3}{x+2} \to -\infty$.

Luego, $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-3}{x+2} = -\infty$.

c. Podemos decir que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe.

d. Además se puede afirmar que la recta $x = -2$ es la asíntota vertical de la curva $y = \dfrac{-3}{x+2}$.

□

3. Para $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$, calcular:

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

▼ Cuando $x \to 2$, sucede que $(x-2) \to 0$ & $(x-1) \to 1$ por lo cual sabemos que:
$\dfrac{x-1}{x-2} \to$ "$\left(\dfrac{1}{0}\right)$" $= \infty$ (sin signo).
Para precisar el signo, notemos que $(x-1) \to 1$ y que $1 > 0$.

a. Si $x \to 2^-$, entonces $x < 2$ & $x - 2 < 0$; por lo que $\dfrac{x-1}{x-2} < 0$ & $\dfrac{x-1}{x-2} \to$ "$\left(\dfrac{1}{0^-}\right)$".

Luego, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-1}{x-2} = -\infty$.

b. Si $x \to 2^+$, entonces $x > 2$ & $x - 2 > 0$; por lo que $\dfrac{x-1}{x-2} > 0$ & $\dfrac{x-1}{x-2} \to$ "$\left(\dfrac{1}{0^+}\right)$".

Luego, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-1}{x-2} = +\infty$.

c. Podemos decir que $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

Además se puede afirmar que la recta $x = 2$ es la asíntota vertical de la curva $y = \dfrac{x-1}{x-2}$.

□

4. Para $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$, calcular:

a. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$,

b. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$,

c. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$,

d. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

▼ Cuando $x \to -1$, sucede que $x^2 \to 1$, $(x^2-1) \to 0$ & $3x \to -3$.

Por lo cual sabemos que

$$\frac{3x}{x^2-1} \to \text{“}\left(\frac{-3}{0}\right)\text{”} = \infty \text{ (sin signo)}.$$

Para precisar el signo debemos notar que:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2-1} = \frac{3x}{(x-1)(x+1)}$$

donde

$$3x \to -3 < 0,\ (x-1) \to -2 < 0 \ \&\ (x+1) \to 0 \text{ cuando } x \to -1.$$

a. Si $x \to -1^-$, entonces $x < -1$ & $x+1 < 0$; por lo que

$$\frac{3x}{(x-1)(x+1)} < 0 \ \& \frac{3x}{(x-1)(x+1)} \to -\infty, \text{ es decir, } \lim_{x\to -1^-} \frac{3x}{x^2-1} = -\infty.$$

b. Si $x \to -1^+$, entonces $x > -1$ & $x+1 > 0$; por lo que

$$\frac{3x}{(x-1)(x+1)} > 0 \ \& \ \frac{3x}{(x-1)(x+1)} \to +\infty, \text{ es decir, } \lim_{x\to -1^+} \frac{3x}{x^2-1} = +\infty.$$

Cuando $x \to 1$, sucede que $x^2 \to 1$, $(x^2-1) \to 0$ & $3x \to 3$.

Por lo cual sabemos que

$$\frac{3x}{x^2-1} \to \text{“}\left(\frac{3}{0}\right)\text{”} = \infty \text{ (sin signo)}.$$

Para precisar el signo debemos notar que

$$f(x) = \frac{3x}{(x-1)(x+1)}.$$

Donde

$$3x \to 3 > 0,\ (x+1) \to 2 > 0 \ \&\ (x-1) \to 0 \text{ cuando } x \to 1.$$

c. Si $x \to 1^-$, entonces $x < 1$ & $x-1 < 0$. Por lo que

$$\frac{3x}{(x-1)(x+1)} < 0 \ \& \ \frac{3x}{(x-1)(x+1)} \to -\infty.$$

Luego:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x}{(x-1)(x+1)} = -\infty.$$

d. Si $x \to 1^+$, entonces $x > 1$ & $x - 1 > 0$. Por lo que:

$$\frac{3x}{(x-1)(x+1)} > 0 \ \& \ \frac{3x}{(x-1)(x+1)} \to +\infty.$$

Luego:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x}{(x-1)(x+1)} = +\infty.$$

Además, podemos afirmar que las rectas $x = -1$ & $x = 1$ son las asíntotas verticales de la curva $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$ y que no existe $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{3x}{x^2-1}$ ni $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{3x}{x^2-1}$.

□

5. Para $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|\,x\,|}$, calcular:

a. $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x)$, b. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$, c. $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

▼

a. Si $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $|\,x\,| = -x$; por lo que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|\,x\,|}\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{-x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0.$$

Luego, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

b. Si $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ & $|\,x\,| = x$; por lo que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{|\,x\,|}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2}{x}\right) = +\infty.$$

Luego, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

c. Se puede decir que $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Además se puede afirmar que la recta $x = 0$ es la asíntota vertical de la curva $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{|\,x\,|}$.

□

6. Para $f(x) = \dfrac{-5x}{(x^2-4)^2}$, calcular:

a. $\displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x)$, c. $\displaystyle\lim_{x \to -2} f(x)$, e. $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} f(x)$,

b. $\displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x)$, d. $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} f(x)$, f. $\displaystyle\lim_{x \to 2} f(x)$.

▼ Es importante notar que $(x^2-4)^2$ nunca es negativo; es decir, $(x^2-4)^2 \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
Además cuando $x \to -2$ o bien $x \to 2$ sucede que $x^2 \to 4$ & $x^2 - 4 \to 0$.
Por lo cual $(x^2-4)^2 \to 0$, con valores positivos.

a. Si $x \to -2^-$, entonces $(-5x) \to 10 > 0$.

Por lo que $\dfrac{-5x}{(x^2-4)^2} \to +\infty$.

Luego, $\displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$.

b. Si $x \to -2^+$, entonces $(-5x) \to 10 > 0$.

Por lo que $\dfrac{-5x}{(x^2-4)^2} \to +\infty$.

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$.

c. Podemos decir que $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$. Obsérvese que $\displaystyle\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe.

d. Si $x \to 2^-$, entonces $(-5x) \to -10 < 0$.

Por lo que $\dfrac{-5x}{(x^2-4)^2} \to -\infty$.

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$.

e. Si $x \to 2^+$, entonces $(-5x) \to -10 < 0$.

Por lo que $\dfrac{-5x}{(x^2-4)^2} \to -\infty$.

Luego, $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

f. Se puede decir que $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$. Obsérvese que $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe.

Además, se puede afirmar que las rectas $x = -2$ & $x = 2$ son asíntotas verticales de la curva $y = \dfrac{-5x}{(x^2-4)^2}$.

□

7. De acuerdo con la teoría de la relatividad, la masa m de un objeto que viaja a una velocidad v, está dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} ,$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz.

a. Explicar qué ocurre cuando v se acerca a la velocidad de la luz.

b. Explicar por qué sólo tiene sentido calcular $\displaystyle\lim_{v\to c^-} m$.

▼

a. Calculamos:

$$\lim_{v\to c^-} m = \lim_{v\to c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \lim_{v\to c^-} \frac{cm_0}{\sqrt{c^2-v^2}} = +\infty.$$

b. Puesto que la fórmula para m tiene sentido si $c^2 - v^2 > 0 \ \Leftrightarrow\ v^2 < c^2 \ \Leftrightarrow\ v < c$.

□

8. Calcular: $\displaystyle\lim_{s\to 2^+} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{3}{s^2-4}\right)$.

▼ Efectuamos primero la operación:

$$\frac{1}{s-2} - \frac{3}{s^2-4} = \frac{s+2-3}{(s+2)(s-2)} = \frac{s-1}{(s+2)(s-2)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{s\to 2^+} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{3}{s^2-4}\right) = \lim_{s\to 2^+} \frac{s-1}{(s+2)(s-2)} = +\infty.$$

Puesto que $(s-1) \to 1 > 0$, $(s+2) \to 4 > 0$ & $(s-2) \to 0^+$, cuando $s \to 2^+$, entonces:

$$(s+2)(s-2) \to 0^+, \text{ cuando } s \to 2^+.$$

Otra manera de calcular este límite es la siguiente:

Ya que:

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2}-\frac{3}{(x-2)(x+2)}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2}\left(1-\frac{3}{x+2}\right)\right]$$

y además $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty$ & $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(1-\frac{3}{x+2}\right)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}>0;$

entonces $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\frac{1}{x-2}\left(1-\frac{3}{x+2}\right)\right]=+\infty.$

□

9. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3x^2}{x^2-1}$.

▼ Tenemos

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2}{(x+1)(x-1)}=-\infty\,,$$

pues $\lim\limits_{x\to 1^-}3x^2=3$; $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$ & $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0^-\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 1^-}[(x+1)(x-1)]=0^-$. □

10. Calcular: $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-x^2}{4-x^2}$.

▼ Cuando $x\to 2^+$ sucede que $4-x^2\to 0$ & $-x^2\to -4$.

Además: $x\to 2^+\ \Rightarrow\ x>2\ \Rightarrow\ x^2>4\ \Rightarrow\ 4-x^2<0$ por lo cual $\frac{-x^2}{4-x^2}>0$; entonces $\frac{-x^2}{4-x^2}\to +\infty$.

Es decir $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{-x^2}{4-x^2}=+\infty$.

□

3.5 Límites en infinito

Ejercicios 3.5.1

1. Calcular: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x-3}{4x}$.

▼

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x-3}{4x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4x}\right)=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times 0=\frac{1}{2}\,.$$

La recta $y=\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal de la curva $y=\frac{2x-3}{4x}$. □

2. Calcular: $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{4x^3-5x+6}{2x^3-3x^2+8}$.

▼

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^3-5x+6}{2x^3-3x^2+8}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3\left(4-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{x^3\left(2-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^3}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{4-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{2-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^3}}=\frac{4}{2}=2\,.$$

La recta $y = 2$ es asíntota horizontal de la curva $y = \dfrac{4x^3 - 5x + 6}{2x^3 - 3x^2 + 8}$.

□

3. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3 + 6x - 7}{3x^5 - 2x + 1}$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3 + 6x - 7}{3x^5 - 2x + 1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(5 + \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{7}{x^3}\right)}{x^5\left(3 - \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5 + \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{7}{x^3}}{x^2\left(3 - \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}\right)} = \text{``}\left(\frac{5}{\infty}\right)\text{''} = 0^+ .$$

□

4. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5 - 2x + 1}{5x^3 + 6x - 7}$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^5 - 2x + 1}{5x^3 + 6x - 7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^5\left(3 - \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}\right)}{x^3\left(5 + \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{7}{x^3}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(3 - \dfrac{2}{x^4} + \dfrac{1}{x^5}\right)}{5 + \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{7}{x^3}} = \text{``}\left(\frac{+\infty}{5}\right)\text{''} = +\infty.$$

□

5. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

▼

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|\,x\,|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1 .$$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la curva $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

□

6. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|\,x\,|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{1}} = -1 .$$

La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal de la curva $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

□

7. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}$.

▼ Como $x \to -\infty$, podemos pensar que $x<0$ por lo que $|\,x\,| = -x$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{16}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{16}}}{x\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|\,x\,|\sqrt{1-\frac{1}{16}}}{x\left(1+\frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{16}}}{x\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1-\frac{1}{16}}}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{-1}}{1} = -1.$$

Otro procedimiento:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|\,x\,|} = \frac{1}{-x} \text{ o bien } \frac{1}{x} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\,;$$

y multiplicando al numerador y denominador de $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x+4}$ por $\dfrac{1}{x}$ o bien por $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$, obtenemos

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4} = \frac{-\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{x+4}{x}} = -\frac{\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x^2}}}{1+\dfrac{4}{x}} = -\frac{\sqrt{1-\dfrac{16}{x^2}}}{1+\dfrac{4}{x}}\,.$$

Por lo que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-16}}{x+4} = \lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1-\dfrac{16}{x^2}}}{1+\dfrac{4}{x}} = -\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\dfrac{16}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{16}{x^2}\right)}}{1+0} = -\frac{\sqrt{1-0}}{1} = -1\,.$$

□

8. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2x+6}}$.

▼ Como $x \to +\infty$, podemos pensar que $x>0$ por lo que $|\,x\,| = x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2x+6}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5x-\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5x-\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5x-\dfrac{3}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(5x-\dfrac{3}{x}\right)}{x\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5x-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Otro procedimiento:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{3x^2+2x+6}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{5x-3}{x}}{\dfrac{\sqrt{3x^2+2x+6}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{\dfrac{3x^2+2x+6}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}}=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

□

9. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}$.

▼ Como $x\to+\infty$, podemos pensar que $x>0$ por lo que $|\,x\,|=x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{27x^3-54x^2+36x-8}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^3\left(27-\dfrac{54}{x}+\dfrac{36}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^3}\sqrt{27-\dfrac{54}{x}+\dfrac{36}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{x}\sqrt{27-\dfrac{54}{x}+\dfrac{36}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{x}\sqrt{27-\dfrac{54}{x}+\dfrac{36}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}}=0.$$

Otro procedimiento:

Multipliquemos numerador y denominador por $\dfrac{1}{x}$ y como $x\to+\infty$ podemos suponer que $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{|\,x\,|}$ y por ende que $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$; entonces,

$$\frac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}=\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{\sqrt{(3x-2)^3}}{\sqrt{x^2}}}=\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{\dfrac{27x^3-54x^2+36x-8}{x^2}}}=\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{27x-54+\dfrac{36}{x}-\dfrac{8}{x^2}}}$$

y también,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{(3x-2)^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{27x-54+\dfrac{36}{x}-\dfrac{8}{x^2}}}=0\,.$$

□

10. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-3x^2-1}}{x^2-1}$.

▼ Calculamos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4-3x^2-1}}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(1-\dfrac{3x^2}{x^4}-\dfrac{1}{x^4}\right)}}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^4}\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1.$$

□

11. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}}$.

▼ Tenemos que, para $x\neq 0$,

$$\sqrt{3x^2+2x+5}=\sqrt{x^2\left(3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=|\,x\,|\sqrt{3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}.$$

Y que

$$\frac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}}=\frac{x\left(5+\dfrac{2}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}.$$

Luego:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+2}{\sqrt{3x^2+2x+5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5+\dfrac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}=$$

$$=\frac{5+0}{-\sqrt{3+0+0}}=-\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

□

12. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}$.

▼ Como $x\to-\infty$, podemos pensar que $x<0$ por lo que $|\,x\,|=-x$.

$$\frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}=\frac{x\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\dfrac{5}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{9x^2+5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}}=-\frac{4}{3}.$$

□

13. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}$.

▼ Como $x\to-\infty$, podemos pensar que $x<0$ por lo que $|\,x\,|=-x$.

$$\frac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}=\frac{x\left(8+\dfrac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(8+\dfrac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{\left(5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(8+\dfrac{6}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{\left(5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}}=$$

$$=\frac{x\left(8+\dfrac{6}{x}\right)}{-x\sqrt{\left(5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}}=\frac{8+\dfrac{6}{x}}{-\sqrt{\left(5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}}.$$

Y entonces:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+6}{\sqrt{5x^2+6x-8}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{8+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{5+\dfrac{6}{x}-\dfrac{8}{x^2}}}=-\frac{8}{\sqrt{5}}=-\frac{8}{\sqrt{5}}.$$

□

14. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}$.

▼ Observamos que

$$\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}=\frac{x\left(3+\dfrac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{5}{x^2}\right)}}=\frac{x\left(3+\dfrac{4}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{2+\dfrac{5}{x^2}}}=\frac{x\left(3+\dfrac{4}{x}\right)}{-x\sqrt{2+\dfrac{5}{x^2}}},$$

para $x<0$, como será el caso pues vamos a hacer que x tienda a $-\infty$. Entonces:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{3+\dfrac{4}{x}}{\sqrt{2+\dfrac{5}{x^2}}}=-\frac{3+0}{\sqrt{2+0}}=-\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

□

15. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3+2x}$.

▼ Observamos

$$\sqrt{9+4x^2}=\sqrt{x^2\left(\frac{9}{x^2}+4\right)}=|\,x\,|\sqrt{\frac{9}{x^2}+4}=-x\sqrt{\frac{9}{x^2}+4}\text{ si }x<0,$$

que es el caso, pues x tiende a $-\infty$. Además $3+2x=x\left(\dfrac{3}{x}+2\right)$, por lo que

$$\frac{\sqrt{9+4x}}{3+2x}=\frac{-x\sqrt{\dfrac{9}{x^2}+4}}{x\left(\dfrac{3}{x}+2\right)}=-\frac{\sqrt{\dfrac{9}{x^2}+4}}{\dfrac{3}{x}+2}\text{ pues }x<0$$

y así

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3+2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\dfrac{9}{x^2}+4}}{\dfrac{3}{x}+2}=-\frac{\sqrt{0+4}}{0+2}=-\frac{2}{2}=-1.$$

□

16. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}$.

▼ Tanto $\sqrt{x^2+5}+5x$ como $23x+4$ tienden a $+\infty$ cuando $x\to+\infty$, pero vemos que

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)}+5x}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)}=\frac{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5x}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)}.$$

Como $|\,x\,|=x$ si $x>0$, que es el caso pues hacemos tender a x a $+\infty$ entonces:

$$\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}=\frac{x\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5x}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)}=\frac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5\right)}{x\left(23+\dfrac{4}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5}{23+\dfrac{4}{x}}$$

y por último:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+5x}{23x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}+5}{23+\dfrac{4}{x}}=\frac{\sqrt{1+0}+5}{23+0}=\frac{\sqrt{1}+5}{23}=\frac{1+5}{23}=\frac{6}{23}.$$

□

17. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3+x}$.

▼ Tenemos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9+4x^2}}{3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+9}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{9}{x^2}\right)}}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{4+\dfrac{9}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|\,x\,|\sqrt{4+\dfrac{9}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{9}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{9}{x^2}}}{1+\dfrac{3}{x}}=\frac{-\sqrt{4+0}}{1+0}=\frac{-2}{1}=-2.$$

Vemos que $|\,x\,|=-x$, pues $x\to-\infty\;\Rightarrow\;x<0$. □

18. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$.

▼ Vemos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{-x\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x^2}}}=\frac{-5}{\sqrt{1}}=-5\,.$$

Observe que $|\,x\,|=-x$, pues $x\to-\infty\ \Rightarrow\ x<0$. □

19. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

▼

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt{1}}=1\,.$$

La recta $y=1$ es una asíntota horizontal de la curva $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

□

20. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}==\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}}=\frac{-\sqrt{1}}{\sqrt[3]{1}}=-1\,.$$

La recta $y=-1$ es una asíntota horizontal de la curva $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

□

21. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$.

▼ Tenemos

$$\frac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} = \frac{x+5\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}} = \frac{x+5\,|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{|\,x\,|\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{x+5x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{x\left(1+5\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1+5\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+5\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+5\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}} = \frac{1+5\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\cdot\sqrt{2}\,.$$

□

22. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

▼ Tenemos

$$\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1} = \frac{x^3(2x+1)-x^2(2x^2-1)}{(2x^2-1)(2x+1)} = \frac{2x^4+x^3-2x^4+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1} =$$

$$= \frac{x^3+x^2}{4x^3+2x^2-2x-1} = \frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^3\left(4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \frac{1+\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}} \text{ si } x \neq 0\,.$$

Por lo que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}} = \frac{1+0}{4+0} = \frac{1}{4}\,.$$

□

23. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)$.

▼

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5}-x)(\sqrt{x^2+5}+x)}{(\sqrt{x^2+5}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} = 0^+\,.$$

La recta $y=0$ (el eje de las x) es asíntota horizontal de la curva $y=\sqrt{x^2+5}-x$.

□

24. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)$.

▼

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+3}-x)(\sqrt{x^2-4x+3}+x)}{(\sqrt{x^2-4x+3}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}=\frac{-4}{\sqrt{1}+1}=\frac{-4}{2}=-2.$$

La recta $y=-2$ es asíntota horizontal de la curva $y=\sqrt{x^2-4x+3}-x$.

□

25. Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|\,x\,|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1\right)=+\infty.$$

□

26. Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(|\,x\,|\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x\left(\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+1\right)=$$

$$=+\infty.$$

□

27. Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-4x+3}+x)$.

▼

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2-4x+3}+x)(\sqrt{x^2-4x+3}-x)}{(\sqrt{x^2-4x+3}-x)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{|\,x\,|\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{-x\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(4-\dfrac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1} = \frac{4}{\sqrt{1}+1} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

La recta $y = 2$ es asíntota horizontal de la curva $y = \sqrt{x^2-4x+3}+x$.

□

28. Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+5x}-x)$.

▼ Como $x \to -\infty$, entonces:

$$-x \to +\infty,\ x^2 \to +\infty \ \&\ \sqrt{x^2+5x} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)} \to +\infty.$$

Por lo tanto

$$\sqrt{x^2+5x}-x = \sqrt{x^2+5x}+(-x) \to +\infty.$$

□

29. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2})$.

▼ Notemos que, cuando $x \to +\infty$, sucede que

$$\sqrt{4x^2+x} \to +\infty,\ \sqrt{4x^2-2} \to +\infty \ \&\ (\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2}) \to \text{``}(+\infty-\infty)\text{''}.$$

Por esto procedemos de la siguiente manera:

$$\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2} = \frac{\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2}}{1}\,\frac{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{4x^2+x})^2-(\sqrt{4x^2-2})^2}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}} = \frac{(4x^2+x)-(4x^2-2)}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}} =$$

$$= \frac{4x^2+x-4x^2+2}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}} = \frac{x+2}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x}-\sqrt{4x^2-2}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{4x^2+x}+\sqrt{4x^2-2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{1}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(4-\dfrac{2}{x^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{x^2}\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+|\,x\,|\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4-\dfrac{2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{4}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}\,.$$

□

30. Calcular: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x)$.

▼ Tenemos

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2}-x) = \lim_{x\to-\infty}[(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}-x] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{[(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}-x][(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}+(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}x+x^2]}{(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}+(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}x+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^3+2x^2)-x^3}{(x^3+2x^2)^{\frac{2}{3}}+x(x^3+2x^2)^{\frac{1}{3}}+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{[x^3(1+\frac{2}{x})]^{\frac{2}{3}}+x[x^3(1+\frac{2}{x})]^{\frac{1}{3}}+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2(1+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}+x^2(1+\frac{2}{x})^{\frac{1}{3}}+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^2[(1+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{2}{x})^{\frac{1}{3}}+1]} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{(1+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{2}{x})^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}\,.$$

□

31. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

▼ Transformamos la expresión

$$\sqrt{x^2+x}-x = (\sqrt{x^2+x}-x)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

y dividiendo entre $x > 0$ numerador y denominador:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}$$

podemos calcular el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}\,.$$

□

32. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+6}+x\right)$.

▼ Racionalizando,

$$\sqrt{x^2+2x+6}+x = \frac{x^2+2x+6-x^2}{\sqrt{x^2+2x+6}-x} = \frac{2x+6}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}-x} =$$

$$= \frac{2x+6}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x} = \frac{2x+6}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x}$$

si $x<0$, como va a ser el caso, entonces $|\,x\,| = -x$

$$\frac{2x+6}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1\right)} = \frac{-2-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1}$$

por lo que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+6}+x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2-\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1} = \frac{-2-0}{1+1} = -\frac{2}{2} = -1\,.$$

□

33. Calcular: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1})$.

▼ No tiene sentido, pues

$$D_{\sqrt{x^3+x}} = \{x\in\mathbb{R}\,\big|\,x^3+x\geq 0\}$$

y también

$$x^3+x = x(x^2+1)\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\geq 0.$$

Luego, no podemos tomar valores de x negativos como es el caso si $x\to-\infty$.

Ocurre algo análogo con la función $\sqrt{x^3+1}$, pues su dominio son los reales x tales que $x^3+1\geq 0$, es decir, aquellos que $x^3\geq -1$; luego, $x\geq -1$, por lo que x no puede tomar valores menores que -1.

□

34. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+5}-x)$.

▼ Racionalizando:

$$\sqrt{x^2-2x+5}-x=\frac{x^2-2x+5-x^2}{\sqrt{x^2-2x+5}+x}=\frac{-2x+5}{\sqrt{x^2-2x+5}+x}\,.$$

Multiplicando numerador y denominador por $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{|\,x\,|}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$, si $x>0$, obtenemos

$$\sqrt{x^2-2x+5}-x=\frac{-2+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1},\ \text{por lo que}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+5}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-2+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+1}=\frac{-2}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1\,.$$

□

35. Calcular: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+5x-3})$.

▼ Vemos que

$$\lim_{x\to+\infty}(2x-\sqrt{4x^2+5x-3})=\lim_{x\to+\infty}\left[(2x-\sqrt{4x^2+5x-3})\times\frac{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)^2-(\sqrt{4x^2+5x-3})^2}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-(4x^2+5x-3)}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x^2-5x+3}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+\sqrt{4x^2+5x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+\sqrt{x^2}\sqrt{4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+|\,x\,|\sqrt{4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+3}{2x+x\sqrt{4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+\dfrac{3}{x}}{2+\sqrt{4+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{-5}{2+\sqrt{4}}=\frac{-5}{2+2}=-\frac{5}{4}\,.$$

□

Ejercicios 3.5.2 *Miscelánea de problemas sobre límites.*

Un límite muy especial para una función f *es* $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. *Calcular este límite para:*

1. $f(x)=c$ con c constante.

▼ $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

□

2. $f(x)=ax+b$ con a,b constantes.

▼ $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[a(x+h)+b]-[ax+b]}{h}==\lim_{h\to 0}\frac{ax+ah+b-ax-b}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=\lim_{h\to 0}a=a.$$

□

3. $f(x)=ax^2+bx+c$ con a,b,c constantes.

▼ $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[a(x+h)^2+b(x+h)+c]-(ax^2+bx+c)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{a(x^2+2xh+h^2)+bx+bh+c-ax^2-bx-c}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{ax^2+2axh+ah^2+bh-ax^2}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2ax+ah+b)}{h}=\lim_{h\to 0}(2ax+ah+b)=2ax+b.$$

□

4. $f(x)=ax^3$ con a constante.

▼ $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^3-ax^3}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{a(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-ax^3}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3-ax^3}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3ax^2+3axh+ah^2)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}(3ax^2+3axh+ah^2)=3ax^2.$$

□

5. $f(x)=\frac{c}{ax+b}$ con a,b,c constantes.

▼
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{c}{a(x+h)+b}-\frac{c}{ax+b}\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{c(ax+b)-c(ax+ah+b)}{(ax+ah+b)(ax+b)}\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{c(ax+b-ax-ah-b)}{h(ax+ah+b)(ax+b)} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-cah}{h(ax+ah+b)(ax+b)} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-ca}{(ax+ah+b)(ax+b)} =$$
$$= \frac{-ca}{(ax+b)(ax+b)} = \frac{-ac}{(ax+b)^2}.$$

□

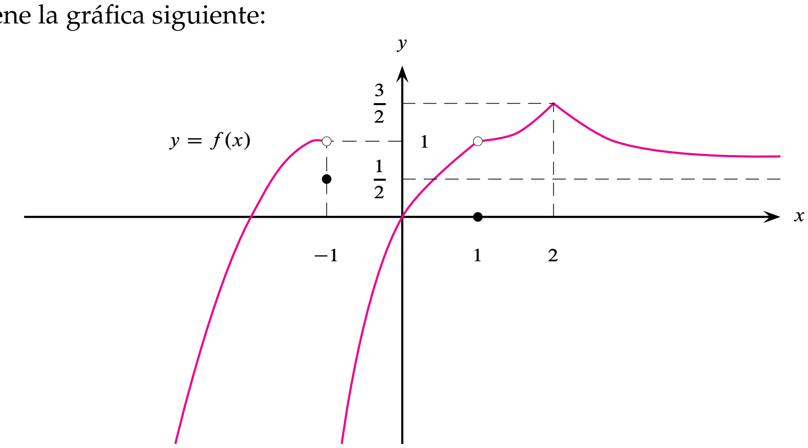
6. $f(x) = \sqrt{x}$.

▼
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ si } x > 0.$$

Para $x = 0$ no tiene sentido calcular $\displaystyle\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{h}}{h}$, pues este último cociente sólo está definido para $h > 0$.

□

7. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. Determine:

i. $\lim_{x \to -1^-} f(x)$;

ii. $\lim_{x \to -1^+} f(x)$;

iii. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$;

iv. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$;

v. $\lim_{x \to 2^-} f(x)$;

vi. $\lim_{x \to 2^+} f(x)$;

vii. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

viii. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b. Calcule $f(1)$, $f(2)$ y también $f(-1)$.

c. ¿Existen los límites $\lim_{x \to -1} f(x)$; $\lim_{x \to 1} f(x)$; $\lim_{x \to 2} f(x)$?

▼

a. i. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 1$;

ii. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$;

iii. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$;

iv. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$;

v. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \dfrac{3}{2}$;

vi. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$;

vii. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;

viii. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

b. $f(1) = 0$, $f(2) = \dfrac{3}{2}$, $f(-1) = \dfrac{1}{2}$.

c. $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe pues no existe $\lim_{x \to -1^+} f(x)$;

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ pues $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$; el límite existe.

$\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{3}{2}$ pues $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{3}{2}$, el límite existe.

□

8. Considere la función: $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}-x} & \text{si } x \le -1\,; \\ \dfrac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} & \text{si } x > -1\,. \end{cases}$

a. Calcule el $\lim_{x \to -\infty} h(x)$.

b. ¿Existe $\lim_{x \to -1} h(x)$? Justifique su respuesta.

▼

a. Cuando $x \to -\infty$, podemos pensar que $x < 0$; entonces :

$$h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}-x}\,.$$

También $\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{|\,x\,|}$; en este caso y multiplicando el numerador por $\dfrac{1}{x}$ y el denominador por $\dfrac{-1}{|\,x\,|} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2}}$, tenemos

$$h(x) = \frac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-(\sqrt{x^2-2x}-x)}{\sqrt{x^2}}} = \frac{1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}}+\dfrac{x}{|\,x\,|}} = \frac{1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+\dfrac{x}{-x}} = \frac{1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}-1}$$

por lo que

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}\,.$$

b. Calculemos los límites laterales de $h(x)$ en $x = -1$.
Racionalizando el numerador (multiplicando por el binomio conjugado del numerador ambas partes de la fracción), tenemos para $x \neq -1$

$$\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} = \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} =$$
$$= \frac{x+5-4}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+2}\,.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{1}{\sqrt{x+5}+2} = \frac{1}{\sqrt{-1+5}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

y también

$$\lim_{x\to-1^-} h(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \frac{-1-1}{\sqrt{(-1)^2-2(-1)}-(-1)} = \frac{-2}{\sqrt{1+2}+1} = \frac{-2}{\sqrt{3}+1}\,,$$

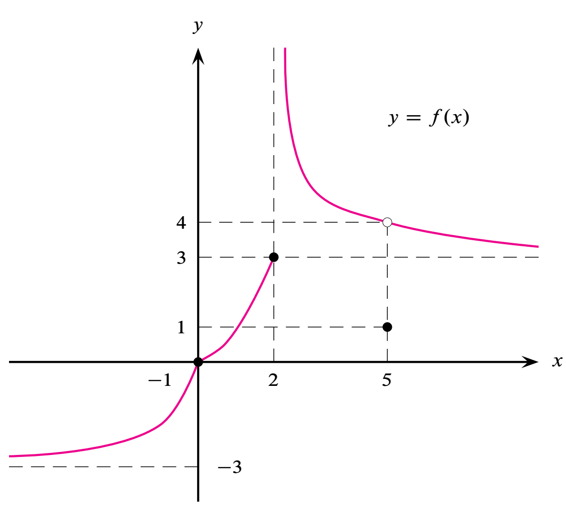
por lo que no existe $\lim_{x\to-1} h(x)$ pues $\lim_{x\to-1^+} h(x) \neq \lim_{x\to-1^-} h(x)$.

□

9. Grafique una función que cumpla con los siguientes requisitos:

a. $f(0) = 0$;
b. $f(5) = 1$;
c. $\lim_{x\to2^-} f(x) = 3$;
d. $\lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty$;
e. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$;
f. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$;
g. $\lim_{x\to5} f(x) = 4$.

▼ Una gráfica de la función f podría ser



□

10. Trace la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

a. $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0$;

b. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$;

c. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 0$;

d. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$;

e. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$;

f. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$;

g. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 4$;

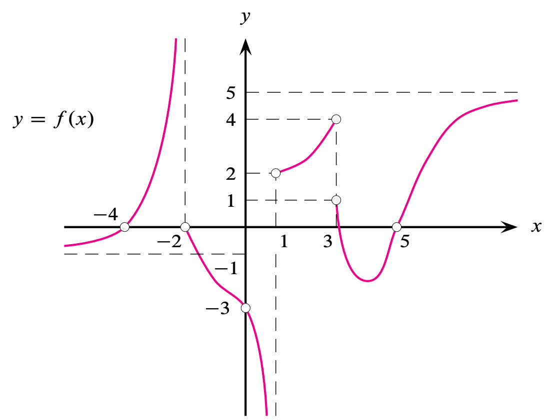
h. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$;

i. $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 0$;

j. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$;

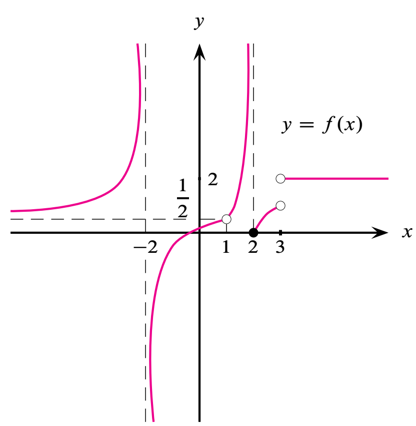
k. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$.

▼ Una gráfica posible de la función f con estas condiciones, es:



□

11. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. De la gráfica determine:

i. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$;

ii. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$;

iii. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$;

iv. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$;

v. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$;

vi. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$;

vii. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$;

viii. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$;

ix. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$;

x. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

b. Calcule $f(-2)$, $f(1)$ y $f(2)$.

c. ¿Existen o no los siguientes límites?: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

▼

a.

i. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \infty$;

ii. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$;

iii. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$;

iv. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$;

v. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2}$;

vi. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$;

vii. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1$;

viii. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$;

ix. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

x. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 2$.

b. $f(-2)$ no existe; $f(1)$ no existe y $f(2) = 0$.

c. Hallamos que

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$; el límite existe; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ no existe.

□

12. Considere la función $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x} & \text{si } x \le -8\,; \\ \dfrac{(x+3)\,|\,x+2\,|}{x+2} & \text{si } -8 < x < -2\,; \\ \sqrt{9-x^2} & \text{si } x \ge -2\,. \end{cases}$

a. Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$.

b. ¿Existe el $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$? Justifique su respuesta.

▼

a. Tenemos

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x}) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-3x}}{1} \times \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-3x}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{(x^2-1)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-3x}} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(3 - \dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2}\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+|\,x\,|\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{|\,x\,|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{-\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} =$$

$$= -\frac{3}{1+1} = -\frac{3}{2}\,.$$

b. Veamos los límites laterales $\lim_{x\to-2^-} g(x)$ & $\lim_{x\to-2^+} g(x)$.

Cuando $x \to -2^-$,

$$x < -2 \;\Rightarrow\; x+2<0 \;\Rightarrow\; |\,x+2\,| = -(x+2) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{|\,x+2\,|}{x+2} = \frac{-(x+2)}{x+2} = -1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \lim_{x\to-2^-} g(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{(x+3)\,|\,x+2\,|}{x+2} =$$
$$= \lim_{x\to-2}[-(x+3)] = -(-2+3) = -1.$$

Cuando $x \to -2^+$,

$$x > -2 \;\Rightarrow\; g(x) = \sqrt{9-x^2} \;\Rightarrow$$
$$\lim_{x\to-2^+} g(x) = \lim_{x\to-2} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(-2)^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}.$$

Entonces,

$$\lim_{x\to-2^-} g(x) \neq \lim_{x\to-2^+} g(x)\,,$$

por lo cual podemos afirmar que $\lim_{x\to-2} g(x)$ no existe.

□

13. De la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} & \text{si } x \le -4\,; \\[2mm] \dfrac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} & \text{si } -4 < x < 1\,, \end{cases}$

determinar los límites laterales en -4 y el límite en $-\infty$.

▼ Tenemos para $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{\sqrt{5x^2+3x+1}}{\sqrt{2x^2-3}} = \frac{\sqrt{x^2(5+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}}{\sqrt{x^2(2-\frac{3}{x^2})}} = \frac{|\,x\,|\sqrt{5+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{|\,x\,|\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}}\,.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{\sqrt{2-\dfrac{3}{x^2}}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1.581\,.$$

Cuando $x \to -4^-$, el límite lo calculamos por evaluación:

$$\lim_{x\to-4^-} f(x) = \frac{\sqrt{5(-4)^2+3(-4)+1}}{\sqrt{2(-4)^2-3}} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{69}{29}} \approx 1.5425\,.$$

Cuando $x \to -4^+$, la x cumple $-4 < x < 1$. Se tiene ahora:

$$f(x) = \frac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}} = \frac{16-x^2}{5-\sqrt{x^2+9}}\,\frac{5+\sqrt{x^2+9}}{5+\sqrt{x^2+9}} = \frac{(16-x^2)(5+\sqrt{x^2+9})}{25-(x^2+9)} =$$

$$= \frac{(16-x^2)(5+\sqrt{x^2+9})}{16-x^2} = 5+\sqrt{x^2+9} \text{ pues } x \neq \pm 4. \;\Rightarrow\; 16-x^2 \neq 0\,.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to-4^+} f(x) = \lim_{x\to-4^+} (5+\sqrt{x^2+9}) = 5+\sqrt{25} = 10\,.$$

□

14. Para la función f definida por $f(x) = \dfrac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, determine:

a. Dominio y raíces.

b. Asíntotas verticales y horizontales.

c. Bosquejo gráfico.

▼

a. Dominio:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4 > 0\} = (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)\ ,$$

pues $x^2-4>0 \;\Rightarrow\; x^2 > 4 \;\Rightarrow\; |\,x\,| > 2 \;\Rightarrow\; x > 2$ o bien $x < -2$

Otra forma de encontrar el dominio es:

$$x^2-4 = (x+2)(x-2) > 0 \;\Leftrightarrow$$

$x+2>0$	& $x-2>0$	o bien	$x+2<0$	& $x-2<0$;
$x>-2$	& $x>2$	o bien	$x<-2$	& $x<2$;
$x>2$		o bien	$x<-2$;	
$x \in (2,+\infty)$		o bien	$x \in (-\infty,-2)$.	

La raíz sería $x=0$, pero, como $0 \notin D_f$, entonces f no tiene raíces.

b. $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty \;\Rightarrow\; x=2$ es una asíntota vertical.

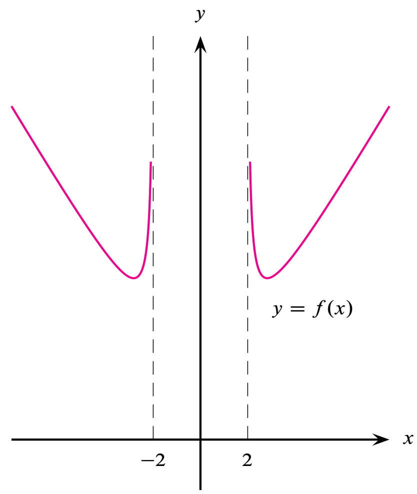
Como f es par, entonces $x=-2$ también es asíntota vertical & $\displaystyle\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{1}{x^2}\sqrt{x^2-4}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^4}}} = +\infty\,,$$

por lo tanto f no tiene asíntotas horizontales.

c. La gráfica de la función f es:

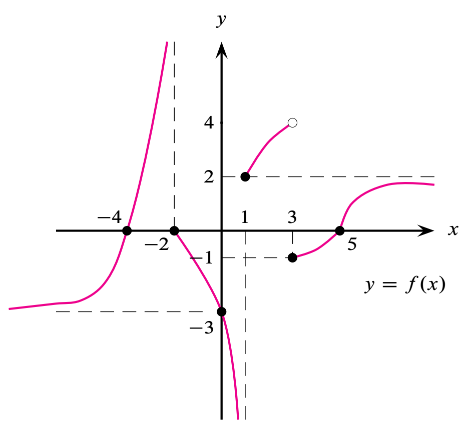


□

15. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumpla los requisitos siguientes:
Es continua en los intervalos $(-\infty, -2)$, $[-2, 1)$, $[1, 3]$ y en $(3, +\infty)$; y además:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$;
b. $\lim\limits_{x\to-4} f(x) = 0$;
c. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$;
d. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 0$;
e. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -3$;
f. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$;
g. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 2$;
h. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = 4$;
i. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = -1$;
j. $\lim\limits_{x\to5} f(x) = 0$;
k. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

▼ Un bosquejo de una gráfica de la función $f(x)$ que cumple con los requisitos pedidos, es:

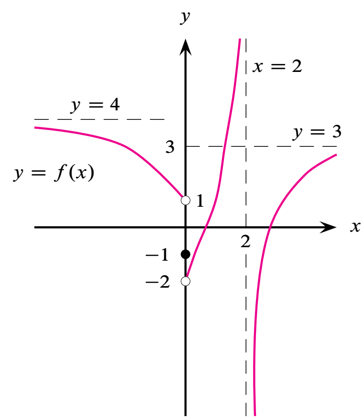


□

16. Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -2$;
b. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$;
c. $f(0) = -1$;
d. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$;
e. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$;
f. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$;
g. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$.

▼ Una posible gráfica es:

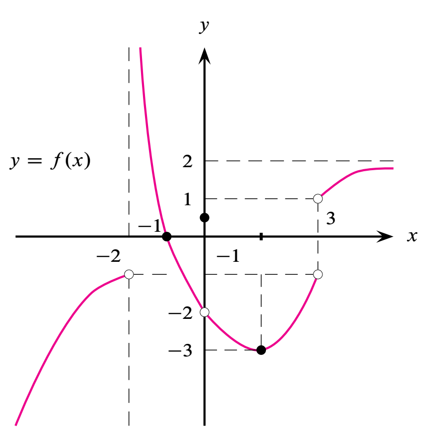


□

17. Bosquejar la gráfica de una función f que cumpla las condiciones siguientes:

a. $f(-1) = 0$;
b. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3$;
c. $f(0) = \frac{1}{2}$;
d. $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -1$;
e. $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$;
f. $\lim_{x \to 0} f(x) = -2$;
g. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -1$;
h. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$;
i. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$;
j. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

▼ Una posible gráfica de la función f con esas condiciones es:

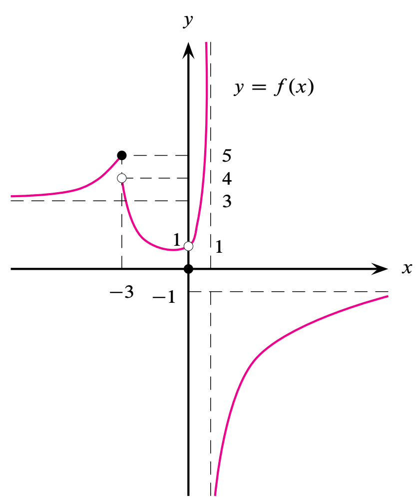


□

18. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla las siguiente condiciones:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$;
b. $\lim_{x\to-3^-} f(x) = 5$;
c. $\lim_{x\to-3^+} f(x) = 4$;
d. $f(0) = 0$;
e. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$;
f. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$;
g. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$;
h. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

▼ Una posible gráfica de una función f con las condiciones enunciadas es:



□

19. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ & $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-x-2}$ con sus dominios naturales.

a. Grafique las funciones f & g.
b. Calcule $\lim_{x\to 1^+} (g\circ f)(x)$.
c. Calcule $\lim_{x\to+\infty} (f\circ g)(x)$.

▼

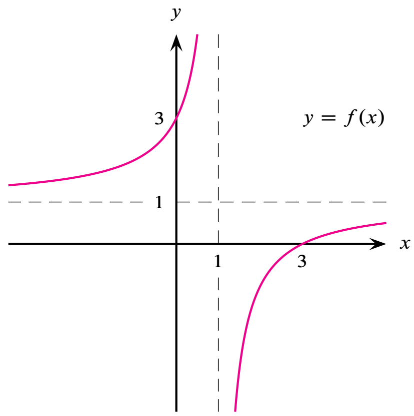
a. Para tener la gráfica de f efectuamos la división

$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} = \frac{x-1-2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - \frac{2}{x-1} = 1 - \frac{2}{x-1}\,.$$

Esto nos permite construir la curva $y = f(x)$ por etapas (mediante alargamientos, traslaciones y reflexiones), partiendo de la curva $y = \dfrac{1}{x}$.

A $y = \dfrac{1}{x}$ se le multiplica por 2 y se obtiene $y = \dfrac{2}{x}$; a $y = \dfrac{2}{x}$ se le traslada una unidad a la derecha y se obtiene $y = \dfrac{2}{x-1}$; esta última función se refleja en el eje x para obtener $y = -\dfrac{2}{x-1}$; finalmente trasladamos una unidad hacia arriba a $y = -\dfrac{2}{x-1}$ para obtener $y = -\dfrac{2}{x-1} + 1$ que es $y = 1 - \dfrac{2}{x-1} = f(x)$.

La función f tiene la gráfica:



Para obtener la gráfica de g debemos realizar un análisis de la función.

El dominio: como $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2} = \dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)}$, vemos que

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, (x+1)(x-2) = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{-1, 2\}.$$

Raíces: $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ o bien $x = 3$.

- Si $x \to -1^-$, entonces $(x+1) \to 0$ con valores negativos ya que $x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0$. Además cuando $x \to -1^-$

$$(x+3) \to 2 > 0, (x-3) \to -4 < 0 \; \& \; (x-2) \to -3 < 0.$$

Entonces $\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$, por lo cual

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)} \to -\infty; \text{ esto es, } \lim_{x \to -1^-} g(x) = -\infty.$$

- Pero si $x \to -1^+$, entonces $(x+1) \to 0$ con valores positivos ya que $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$. Es decir,

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-2)} > 0 \Rightarrow \lim_{x \to -1^+} g(x) = +\infty.$$

- De manera análoga se obtiene que

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = +\infty \quad \& \quad \lim_{x \to 2^+} g(x) = -\infty.$$

De lo anterior se puede asegurar que las rectas $x = -1$ & $x = 2$ son asíntotas verticales de g.
En cuanto a las asíntotas horizontales se tiene que:

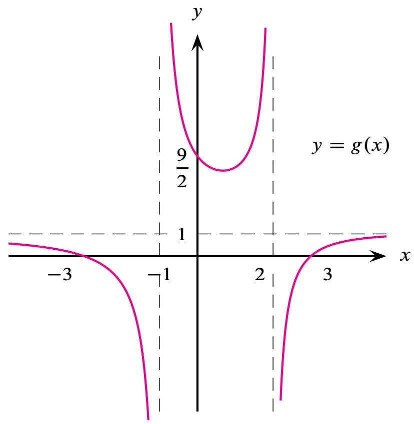
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(1 - \dfrac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \dfrac{9}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1;$$

y de la misma manera encontramos que

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1.$$

Por lo tanto la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal de g.
Un posible bosquejo de la gráfica de g:



b. Para calcular $\lim_{x\to 1^+} (g \circ f)(x)$, observamos

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{x-3}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{(x-3)^2}{(x-1)^2} - 9}{\dfrac{(x-3)^2}{(x-1)^2} - \dfrac{x-3}{x-1} - 2} =$$

$$= \frac{\dfrac{(x-3)^2 - 9(x-1)^2}{(x-1)^2}}{\dfrac{(x-3)^2 - (x-3)(x-1) - 2(x-1)^2}{(x-2)^2}} = \frac{x^2 - 6x + 9 - 9x^2 + 18x - 9}{x^2 - 6x + 9 - x^2 + 4x - 3 - 2x^2 + 4x - 2} =$$

$$= \frac{-8x^2 + 12x}{-2x^2 + 2x + 4}.$$

Entonces:

$$\lim_{x\to 1^+} g[f(x)] = \lim_{x\to 1^+} \frac{-8x^2 + 12x}{-2x^2 + 2x + 4} = 1.$$

c. Para calcular $\lim_{x\to +\infty} (f \circ g)(x)$, observamos

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2}\right) = \frac{\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2} - 3}{\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - x - 2} - 1} = \frac{\dfrac{x^2 - 9 - 3x^2 + 3x + 6}{x^2 - x - 2}}{\dfrac{x^2 - 9 - x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2}} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 3x - 3}{x - 7} \text{ si } x \neq -1, 2\,.$$

Entonces:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^2 + 3x - 3}{x - 7} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{x\left(1 - \dfrac{7}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(-2 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)}{1 - \dfrac{7}{x}} = -\infty.$$

□

CAPÍTULO

4

Continuidad

4.1 Continuidad en un punto

Ejercicios 4.1.1

1. Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2 - a & \text{si } x < 1\,; \\ b & \text{si } x = 1\,; \\ \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

Determinar los valores de a, b para que la función sea continua en $x = 1$.

▼ Para que $g(x)$ sea continua en el punto $x = 1$, se tiene que cumplir que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1).$$

Es decir, que

$$\lim_{x \to 1} g(x) = b.$$

Y por lo tanto, que

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = b \text{ y que } \lim_{x \to 1^+} g(x) = b.$$

Calculamos:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x^2 - a) = 3 - a.$$

Calculamos también

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-1)(\sqrt{x+3}+2)}\,.$$

Observe que aquí hemos racionalizado el numerador multiplicándolo, al igual que el denominador, por su binomio conjugado $\sqrt{x+3}+2$; entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} g(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3-4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\times 1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{(1+1)(\sqrt{1+3}+2)} = \frac{1}{2(\sqrt{4}+2)} = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = b \ \Rightarrow\ b = \frac{1}{8}.$$

También,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = b \ \Rightarrow\ 3-a = b \ \Rightarrow\ a = 3-b = 3-\frac{1}{8} = \frac{23}{8}\,.$$

□

2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto -4. Se define $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(2x-10) + \dfrac{x^2-2}{x+3}$. ¿Es g continua en $a = 3$? Diga por qué.

▼ Como

$$g(3) = f(6-10) + \frac{3^2-2}{3+3} = f(-4) + \frac{7}{6}$$

y además como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} g(x) &= \lim_{x\to 3}\left[f(2x-10) + \frac{x^2-2}{x+3}\right] = \lim_{x\to 3} f(2x-10) + \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x+3} = \\ &= f(6-10) + \frac{3^2-2}{3+3} = f(-4) + \frac{7}{6} = g(3),\end{aligned}$$

efectivamente, g es continua en 3.

Sin necesidad de cálculo alguno observamos que la función $\dfrac{x^2-2}{x+3}$ es continua en su dominio, que es el conjunto de todos los reales menos -3, por lo que es continua en $x = 3$.

La función $2x-10$ es continua en su dominio, que son todos los reales y en $x = 3$ vale $2(3)-10 = -4$ precisamente donde la función f es continua; por lo tanto la composición de funciones $f(2x-10)$ es continua en $x = 3$.

Como conclusión $g(x)$ es continua en $x = 3$ por ser suma de funciones continuas en $x = 3$.

□

3. Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^3+7 & \text{si } x < -2; \\ ax^2-3 & \text{si } -2 \le x < 2; \\ b & \text{si } x = 2; \\ -x+7 & \text{si } 2 < x. \end{cases}$$

 a. Determinar los valores de las constantes a, b que hacen de f una función continua en $x = 2$.
 b. Reescriba la función f con los valores calculados de a, b. Estudie la continuidad o discontinuidad de f en $x = -2$.

▼

a. Primero aseguramos la existencia de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2-3) = a(2)^2-3 = 4a-3\,;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(-x+7) = -2+7 = 5\,.$$

Entonces $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe si

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 4a-3=5 \Leftrightarrow 4a=8\,.$$

De donde $a=2$.

Con el valor de $a=2$ se asegura que el $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

Ahora bien como $f(2)=b$ y, como se quiere la continuidad de f en $x=2$, deberá cumplirse que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)\,.$$

Esto es, que $b=5$.

b. La función resultó ser

$$f(x) = \begin{cases} x^3+7 & \text{si } x<-2; \\ 2x^2-3 & \text{si } -2\le x<2; \\ 5 & \text{si } x=2; \\ -x+7 & \text{si } 2<x\,. \end{cases}$$

Veamos ahora si f es continua en $x=-2$.

$$f(-2) = 2(-2)^2-3 = 8-3 = 5;$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-}(x^3+7) = (-2)^3+7 = -8+7 = -1.$$

Además $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}(2x^2-3) = 2(-2)^2-3 = 8-3 = 5 \;\Rightarrow\; f$ no es continua en $x=-2$.

Ya que $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -1$ y que $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 5$, entonces $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, lo cual implica que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ no existe.

En $x=-2$, la función tiene una discontinuidad (esencial de salto).

□

4. Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4\,|\,x\,|} & \text{si } x<0; \\ \dfrac{1}{4} & \text{si } x=0; \\ \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & \text{si } x>0\,, \end{cases}$$

y estudie su continuidad en $x=0$.

▼ Para $x<0$ se tiene que $|\,x\,| = -x$, por lo que

$$g(x) = \frac{x}{4\,|\,x\,|} = \frac{x}{4(-x)} = -\frac{1}{4}$$

que es una función constante.

Entonces,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

La función g es discontinua en $x = 0$. Basta ver que

$$g(0) = \frac{1}{4}$$

y que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\frac{1}{4} \neq \frac{1}{4},$$

es decir,

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq g(0)\,.$$

Aún más

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Por lo que, $\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x)$ no existe.

□

5. Determinar los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en $x = 0$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 0; \\ \dfrac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3} & \text{si } x \geq 0 \;\&\; x \neq 3; \\ b & \text{si } x = 3\,. \end{cases}$$

▼ Para que la función sea continua en $x = 0$, se debe cumplir $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Por lo tanto también se debe cumplir $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Calculamos ambos límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x+a) = a;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3} = \frac{4-\sqrt{4}}{-3} = -\frac{2}{3} = f(0)\,.$$

Igualando ambos límites:

$$a = -\frac{2}{3}\,.$$

Ahora en $x = 3$ se debe cumplir que $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3}\right) = \frac{4-\sqrt{16}}{9-6-3} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}\,.$$

Tenemos una indeterminación:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3} = \frac{4-\sqrt{4x+4}}{x^2-2x-3}\times\frac{4+\sqrt{4x+4}}{4+\sqrt{4x+4}} = \\ &= \frac{16-(4x+4)}{(x^2-2x-3)(4+\sqrt{4x+4})} = \frac{12-4x}{(x^2-2x-3)(4+\sqrt{4x+4})} = \\ &= \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x+1)(4+\sqrt{4x+4})} = \frac{-4}{(x+1)(4+\sqrt{4x+4})} \quad \text{si } x \neq 3. \end{aligned}$$

Por lo cual

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{-4}{(x+1)(4+\sqrt{4x+4})} = \frac{-4}{4\times 8} = -\frac{1}{8}\,.$$

Igualando, $b = f(3) = -\dfrac{1}{8}$.

Por lo tanto: $a = -\dfrac{2}{3}$ & $b = -\dfrac{1}{8}$. □

6. Calcule los valores de a & b de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 1; \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \le x < 2; \\ 3x & \text{si } x \ge 2\,, \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$ y en $x = 2$.

▼ Para que f sea continua en $x = 1$ y en $x = 2$ se tiene que cumplir que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1}(x+1) = a(1)^2 + b \;\Rightarrow\; 1+1 = a+b$$

y que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 2}(ax^2+b) = 3(2) \;\Rightarrow\; a(2)^2 + b = 6.$$

De aquí tenemos que

$$2 = a+b, \text{ de la primera condición,}$$

y que

$$4a + b = 6\,, \text{ de la segunda condición.}$$

Esto es, tenemos que resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para hallar a & b.

$$\begin{cases} a+b = 2; \\ 4a + b = 6\,. \end{cases}$$

Restando la primera a la segunda tenemos que $3a = 4$, es decir que, $a = \dfrac{4}{3}$. De la primera ecuación, $b = 2 - a$, por lo que $b = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{6-4}{3} = \dfrac{2}{3}$.

□

7. Calcule los valores de a & b que hacen continua a la siguiente función en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1; \\ a & \text{si } x = -1; \\ bx^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2\,. \end{cases}$$

▼ Para que la función sea continua en $x = -1$, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1).$$

Y de aquí que:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1).$$

Pero como

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -3 - 2 = -5 \text{ y}$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = b + 1\,,$$

para que exista límite en $x = -1$:

$$-5 = b + 1 \Rightarrow b = -6\,,$$

y para que la función sea continua en $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow -5 = a\,.$$

Por lo tanto, $a = -5$. □

8. Considere la función $g(x) = (x-1)f(x)$ con $0 \le x \le 2$, donde f es la función máximo entero. Decida, señalando claramente sus argumentos, si g es continua o no en $x = 1$.

▼ Por un lado tenemos $g(1) = (1-1)f(1) = 0$ y también

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} [(x-1)f(x)] = \lim_{x \to 1^-} (x-1) \times \lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 \times 0 = 0 \text{ y además}$$
$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (x-1) \times \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \times 1 = 0.$$

Luego, $\lim_{x \to 1} g(x) = 0 = g(1)$ por lo que $g(x)$ es continua en $x = 1$. □

9. Determinar los valores de las constantes a, b & c que hacen continua en todo su dominio la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2; \\ ax^2 + b & \text{si } -2 \le x < 1; \\ c & \text{si } x = 1; \\ 1 - x & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

▼ La función f es continua en $(-\infty, -2)$, $[-2, 1)$ & $(1, +\infty)$, pues es polinomial en tales intervalos, pero tenemos que hacerla continua en $x = -2$ & $x = 1$. Sabemos que

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -3 \;\&\; f(-2) = 4a + b = \lim_{x \to -2^+} f(x)\,.$$

Por lo cual, para que f sea continua en $x = -2$, se tiene que cumplir que $4a + b = -3$.
Así mismo

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + b\,;\; f(1) = c \;\&\; \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0\,.$$

Por lo que $c = 0$ & $a + b = 0$; entonces, para que f sea continua en $\mathbb{R}$, se tienen que cumplir ambas ecuaciones

$$\begin{cases} 4a + b = -3; \\ a + b = 0\,. \end{cases}$$

Para resolver este sistema restemos de la primera ecuación la segunda; tendremos $3a = -3 \Rightarrow a = -1$; sustituyendo por este valor en la segunda resulta que $b = 1$. □

10. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^3 + 14x^2 - 27x + 4}{3x - 4}$, encuentre el punto donde esa función no es continua. ¿Cómo definiría la función en ese punto para que ésta resultase continua?

▼ Como la función f es racional, es continua en todos los reales menos en las raíces del denominador; y es continua en $\mathbb{R}$ con excepción de x cuando $3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.

Notamos luego que $x = \dfrac{4}{3}$ es también raíz del numerador y por lo tanto el numerador tiene que ser divisible entre $3x - 4$:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 6x - 1 \\
\hline
3x - 4 & 3x^3 + 14x^2 - 27x + 4 \\
 & \underline{-3x^3 + 4x^2} \\
 & \quad 18x^2 - 27x + 4 \\
 & \quad \underline{-18x^2 + 24x} \\
 & \qquad - 3x + 4 \\
 & \qquad \underline{+3x - 4} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

por lo que, $3x^3 + 14x^2 - 27x + 4 = (3x - 4)(x^2 + 6x - 1)$ &

$$f(x) = \frac{(3x-4)(x^2+6x-1)}{3x-4} = x^2 + 6x - 1 \text{ si } x \neq \frac{4}{3}.$$

Entonces la función f resultaría continua en $x = \frac{4}{3}$, definiendo

$$f\left(\frac{4}{3}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to \frac{4}{3}} f(x) = \lim_{x \to \frac{4}{3}} (x^2 + 6x - 1) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(6 \times \frac{4}{3}\right) - 1 = \frac{16}{9} + 8 - 1 = \frac{16 + 63}{9} = \frac{79}{9}. \quad \square$$

11. Determine los valores de las constantes c & k que hacen continua la función en $x = 1$ y en $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1; \\ cx + k & \text{si } 1 < x < 4; \\ -2x & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

Dar un bosquejo de la gráfica de esa función con los valores encontrados.

▼ Tenemos $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$ & $\lim_{x \to 1^+} f(x) = c + k$; luego, $c + k = 1$ si queremos que f sea continua en $x = 1$.

Análogamente $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 4c + k$ & $f(4) = -8 = \lim_{x \to 4^+} f(x)$, por lo que $4c + k = -8$ para que f sea continua en $x = 4$.

Para que f sea continua en $x = 1$ y en $x = 4$, necesitamos que

$$\begin{cases} c + k = 1; \\ 4c + k = -8. \end{cases}$$

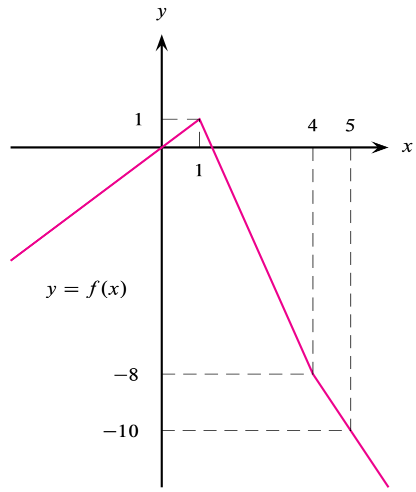
Resolvamos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, restándole a la segunda la primera:

$3c = -9 \Rightarrow c = \frac{-9}{3} = -3$ y sustituyendo por este valor en la primera: $-3 + k = 1 \Rightarrow k = 4$.

La función resultante es;

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1; \\ -3x + 4 & \text{si } 1 < x < 4; \\ -2x & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

Su gráfica:



Gráficamente lo que hicimos fue trazar la recta $y = 4 - 3x$ que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(4, -8)$ así como calcular $f(0) = 0$ & $f(5) = 10$. □

12. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 4 & \text{si } x \le -1; \\ 2ax + b & \text{si } -1 < x \le 2; \\ x^2 - 4x + 4 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

a. Encontrar los valores de a, b para que la función sea continua en $x = -1$ y en $x = 2$.

b. Graficar la función con los valores encontrados.

▼

a. Ya que tenemos que hacer continua a f en $x = -1$ y en $x = 2$, observemos que

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^2 + 4x + 4) = 1 = f(-1)$$

y también que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (2ax + b) = -2a + b.$$

Por lo que $1 = -2a + b$ para que f sea continua en $x = -1$.

Análogamente: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4a + b = f(2)$ & $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4x + 4) = 0.$

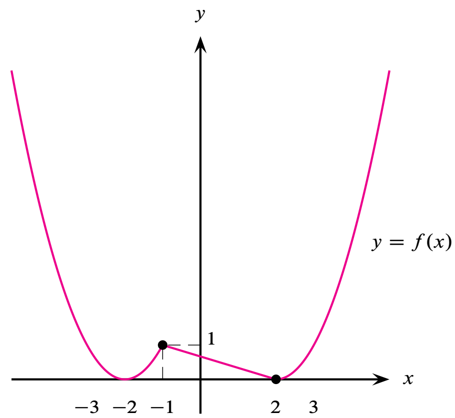
Entonces $4a + b = 0$ para que f sea continua en $x = 2$.
Para que f sea continua en dichos puntos, se tienen que cumplir simultáneamente

$$\begin{cases} -2a + b = 1; \\ 4a + b = 0. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a, b restándole a la segunda la primera: $6a = -1 \;\Rightarrow\; a = -\dfrac{1}{6}$.
Sustituyendo por este valor en la primera:

$$\frac{2}{6} + b = 1 \;\Rightarrow\; b = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

b. Tenemos $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ en el intervalo $(-\infty, -1]$.
Tenemos también $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ en el intervalo $[2, +\infty)$.
En el intervalo $[-1, 2]$, la recta $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.
Tabulamos: $f(-3) = 1$ & $f(3) = 1$.
La gráfica de la función f es:



Comentario. Gráficamente determinamos la recta $y = 2ax + b$ que une los puntos $(-1, 1)$ y $(2, 0)$; en efecto dicha recta tiene por pendiente: $m = \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$ y su ecuación es:

$$y = -\frac{1}{3}(x - 2) = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

□

13. Determine los valores de a, b para que la siguiente función sea continua en $x = -3$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = -3; \\ 9 - x^2 & \text{si } x \neq \pm 3; \\ b & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

▼ Debemos analizar la continuidad de la función f sólo en los números $x = -3$ & $x = 3$.

a. La función f es continua en $x = -3$ si

$$\lim_{x \to -3} f(x) = f(-3) \Leftrightarrow \lim_{x \to -3} (9 - x^2) = a \Leftrightarrow 9 - (-3)^2 = a \Leftrightarrow a = 0.$$

b. La función f es continua en $x = 3$ si

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \lim_{x \to 3} (9 - x^2) = b \Leftrightarrow 9 - (3)^2 = b \Leftrightarrow b = 0.$$

Luego la función f es continua en $x = -3$ & $x = 3$, cuando $a = 0 = b$.

□

14. Determine los valores a, b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = -2$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x \leq -2; \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 < x \leq 3; \\ x - b & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

▼ Para asegurar la continuidad de f en $x = -2$ y en $x = 3$ veamos que

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 1) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3;$$
$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2} (ax + 1) = f(-2) = -2a + 1.$$

Es decir, si $-2a + 1 = 3$, $f(x)$ es continua en $x = -2$. Esta igualdad se cumple para $a = -1$.

Además

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x - b) = 3 - b;$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2 - 1) = f(3) = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8.$$

Es decir, si $8 = 3 - b$, $f(x)$ es continua en $x = 3$. Esta igualdad se cumple para $b = -5$.

Por lo tanto,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \le -2; \\ x^2 - 1 & \text{si } -2 < x \le 3; \\ x + 5 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

□

15. Una legislación estatal sobre impuestos establece un impuesto exigible de 12% sobre los primeros \$20 000 de ganancias gravables y de 16% sobre el resto de las ganancias.
Calcular los valores de las constantes A y B para que la función de impuestos $T(x)$ sea continua para toda x.

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0; \\ A + 0.12x & \text{si } 0 < x \le 20\,000; \\ B + 0.16(x - 20\,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

▼ Para la continuidad de T en los puntos $x = 0$ & $x = 20\,000$ veamos que

$$\lim_{x \to 0^+} T(x) = \lim_{x \to 0} (A + 0.12x) = A;$$

$$\lim_{x \to 0^-} T(x) = \lim_{x \to 0} 0 = T(0) = 0.$$

Ahra, si $A = 0$, la función T es continua en $x = 0$.

Análogamente

$$\lim_{x \to 20\,000^+} T(x) = \lim_{x \to 20\,000^+} [B + 0.16(x - 20\,000)] = B + 0.16(20\,000 - 20\,000) = B + 0 = B,$$

$$\lim_{x \to 20\,000^-} T(x) = \lim_{x \to 20\,000} (A + 0.12x) = T(20\,000) = A + 0.12(20\,000) = 0 + 2\,400 = 2\,400.$$

Entonces, si $B = 2\,400$, la función T es continua en 20 000.

Por lo que

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0; \\ 0.12 & \text{si } 0 < x \le 20\,000; \\ 0.16(x - 20\,000) & \text{si } x > 20\,000. \end{cases}$$

□

16. Calcule los valores de a, b que hacen que la siguiente función sea continua en $x = -1$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & \text{si } x < -1; \\ b & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

▼ Para la continuidad de f en $x = -1$, debemos exigir que $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$; $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe si y sólo si

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to -1} \left(\frac{a}{2x}\right) = \lim_{x \to -1} (x^2 + 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{a}{2(-1)} = (-1)^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{a}{-2} = 2 \Leftrightarrow a = -4.$$

Luego, con $a = -4$ sucede que $\lim_{x \to -1} f(x) = 2$.

También debe ocurrir que $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x)$. Esto se logra cuando $b = f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = 2$, es decir, si $b = 2$.

Encontramos que la función f es una función continua en $x = -1$ cuando $a = -4$ y cuando $b = 2$.

Esto es, cuando

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{x} & \text{si } x < -1; \\ 2 & \text{si } x = -1; \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 2. \end{cases}$$

□

17. a. Hallar los valores de las constantes a, b de modo que la siguiente función sea continua en $x = -1$ y en $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1; \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3; \\ -2 & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$$

b. Dibujar la gráfica de f con los valores obtenidos.

▼

a. En los puntos donde f podría no ser continua es en $x = -1$ y en $x = 3$, que es donde las tres rectas que componen a f no coinciden: entonces tenemos que obligar a que ése no sea el caso, esto es, que $f(x)$ sea continua en ellos; para ello tenemos que hacer que sean iguales:

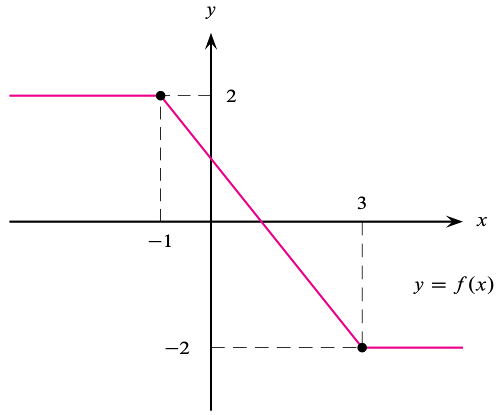
$$f(-1) = 2 \;\&\; \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (ax + b) = a(-1) + b = -a + b;$$
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (ax + b) = 3a + b \;\&\; f(3) = -2.$$

Como se tienen que cumplir simultáneamente ambas condiciones, se tiene que cumplir el sistema

$$\begin{cases} -a + b = 2; \\ 3a + b = -2. \end{cases}$$

Restando a la segunda ecuación la primera: $4a = -4 \Rightarrow a = -1$; y sustituyendo por este valor en la primera $1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$.

b. La gráfica de la función f es:



Comentario. Observemos que la recta $y = ax + b$ tiene que pasar por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -2)$; su pendiente debe ser $m = \dfrac{-2-2}{3+1} = \dfrac{-4}{4} = -1$ y su ecuación entonces es:

$$y - 2 = -(x+1) \Rightarrow y = -x - 1 + 2 \Rightarrow y = -x + 1, \text{ es decir, } a = -1 \;\&\; b = 1.$$

□

18. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -2; \\ -ax + 2b & \text{si } |\,x\,| \le 2; \\ 3 - x^2 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

a. Encuentre valores de a, b para que esa función sea continua en $x = -2$ y en $x = 2$.
b. Dé un bosquejo de la gráfica con estos valores.

▼

a. Para que sea continua en -2 y en 2, se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \;\&\; \lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$$

y para ello deben ser iguales

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-2+1} = \frac{1}{-1} = -1 \;\&\; f(-2) = 2a + 2b = \lim_{x\to -2^+} f(x);$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (3 - x^2) = 3 - 2^2 = 3 - 4 = -1 \;\&\; f(2) = -2a + 2b = \lim_{x\to 2^-} f(x).$$

Luego, se tienen que cumplir las dos ecuaciones

$$\begin{cases} -2a + 2b = -1; \\ 2a + 2b = -1. \end{cases}$$

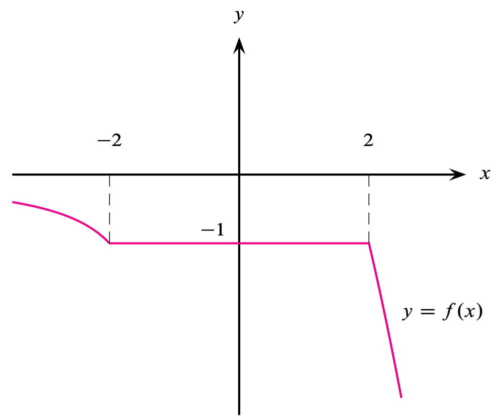
Resolvamos pues tal sistema sumándolas: $4b = -2 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2}$; sustituyendo por este valor en la primera ecuación, tenemos:

$$2a - 1 = -1 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0.$$

La función con estos valores es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -2; \\ -1 & \text{si } |\,x\,| \le 2; \\ 3 - x^2 & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

b. Su gráfica:



□

19. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - \sqrt{40 - 12x}}{3x^2 + x - 14} & \text{si } |\,x\,| \le 3, x \ne 2, x \ne -\dfrac{7}{3}; \\ a & \text{si } x = 2\,. \end{cases}$$

¿Para qué valores de a la función es continua en $x = 2$?

▼ Para que la función sea continua en $x = 2$ se debe cumplir

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = a\,.$$

Si tratamos de calcular el límite por evaluación obtenemos:

$$\frac{4 - \sqrt{40 - 24}}{3 \times 2^2 + 2 - 14} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}, \text{es decir, una indeterminación “}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”}.$$

Primero vamos a trabajar el denominador de $f(x)$. Puesto que es un polinomio de segundo grado que tiene como cero o raíz a $x = 2$, sabemos que $x - 2$ es un divisor del polinomio. Para hallar la factorización correspondiente efectuamos la siguiente división:

$$\begin{array}{r|l} & 3x + 7 \\ \hline x - 2 & 3x^2 + x - 14 \\ & \underline{-3x^2 + 6x} \\ & \qquad 7x \\ & \qquad \underline{-7x + 14} \\ & \qquad\quad 0\,. \end{array}$$

Tenemos entonces que $3x^2 + x - 14 = (x - 2)(3x + 7)$.

Un poco de álgebra:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-\sqrt{40-12x}}{3x^2+x-14} &= \frac{2x-\sqrt{40-12x}}{(x-2)(3x+7)} \times \left(\frac{2x+\sqrt{40-12x}}{2x+\sqrt{40-12x}}\right) = \\
&= \frac{4x^2-(40-12x)}{(x-2)(3x+7)(2x+\sqrt{40-12x})} = \\
&= \frac{4x^2+12x-40}{(x-2)(3x+7)(2x+\sqrt{40-12x})} = \\
&= 4\frac{x^2+3x-10}{(x-2)(3x+7)(2x+\sqrt{40-12x})} = \\
&= 4\frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(3x+7)(2x+\sqrt{40-12x})} = \\
&= 4\frac{x+5}{(3x+7)(2x+\sqrt{40-12x})} \quad \text{si } x-2\neq 0 \ \Leftrightarrow\ x\neq 2\,.
\end{aligned}$$

Ahora podemos calcular el límite

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left(4\frac{x+5}{(3x+7)(2x+\sqrt{40-12x})}\right) = \frac{4\times 7}{13\times 8} = \frac{7}{26}.$$

Entonces, si $a=\dfrac{7}{26}$, la función f es continua en $x=2$. □

20. Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} mx-n & \text{si } x<1; \\ 5 & \text{si } x=1; \\ 2mx+n & \text{si } x>1. \end{cases}$$

a. Encontrar los valores de m y de n de modo que la función sea continua en $x=1$. b. Graficar la función continua obtenida.

▼

a. Para que la función sea continua en $x=1$ se debe cumplir:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

La igualdad de la izquierda nos proporciona:

$$\lim_{x\to 1}(mx-n) = f(1) \ \Leftrightarrow\ m-n=5.$$

La igualdad de la derecha nos proporciona:

$$f(1)=\lim_{x\to 1}(2mx+n) \ \Leftrightarrow\ 5=2m+n\,.$$

Esto es, obtenemos:

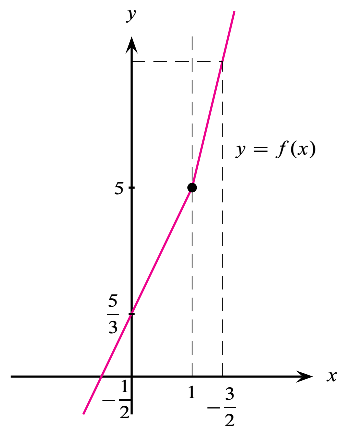
$$\begin{aligned} m-n&=5; \\ 2m+n&=5, \end{aligned}$$

un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es: $m=\dfrac{10}{3}$ & $n=-\dfrac{5}{3}$.

La función con estos valores es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{3}x + \dfrac{5}{3} & \text{si } x < 1; \\ 5 & \text{si } x = 1; \\ \dfrac{20}{3}x - \dfrac{5}{3} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b. La función f con esos valores tiene la siguiente gráfica:



□

21. Sea la función

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < -1; \\ c & \text{si } x \in [-1, 1]; \\ x + 2 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

a. Encontrar los valores de a & c que hacen que la función g sea continua en los puntos donde $|\,x\,| = 1$.

b. Dar un bosquejo de la gráfica de g con los valores encontrados.

▼

a. Para la continuidad en $x = -1$ & $x = 1$ se debe cumplir:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^+} g(x) = g(-1) \;\&\; \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1).$$

Esto se traduce en

$$a + 1 = c;$$
$$c = 1 + 2 \text{ respectivamente;}$$

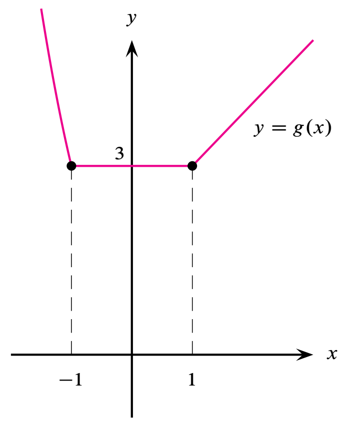
resolviendo se encuentra

$$c = 3;$$
$$a = 2\,,$$

Con estos valores la función es:

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{si } x < -1; \\ 3 & \text{si } x \in [-1, 1]; \\ x + 2 & \text{si } x > 1\,. \end{cases}$$

b. La gráfica de la función g es:



□

22. Sea la función

$$g(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \le -1; \\ at^2 + bt + 1 & \text{si } -1 < t < 2; \\ \frac{3}{2}t & \text{si } t \ge 2\,. \end{cases}$$

a. Encontrar las valores de a, b para que la función g sea continua en $x = -1$ y en $x = 2$.

b. Con los valores encontrados, gráficar la función.

▼

a. Para la continuidad en todos los reales se debe cumplir:

$$\lim_{t \to -1^-} g(t) = \lim_{t \to -1^+} g(t) = g(-1) \;\&\; \lim_{t \to 2^-} g(t) = \lim_{t \to 2^+} g(t) = g(2).$$

Esto se traduce en

$$3 = a - b + 1;$$
$$4a + 2b + 1 = 3\,.$$

Es decir, el sistema

$$a - b = 2;$$
$$4a + 2b = 2\,.$$

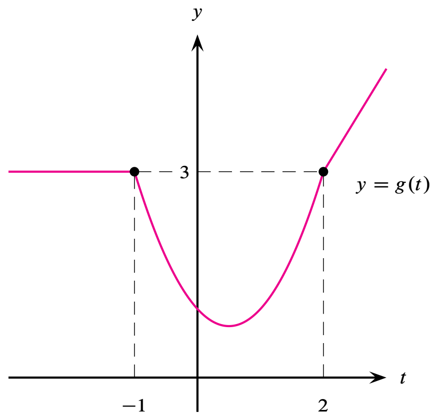
Resolviendo este sistema de dos ecuaciones y con dos incógnitas se obtiene:

$$a = 1;$$
$$b = -1\,.$$

b. Con estos valores la función es:

$$g(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t \le -1; \\ t^2 - t + 1 & \text{si } -1 < t < 2; \\ \frac{3}{2}t & \text{si } t \ge 2; \end{cases}$$

y la gráfica de la función g es:



□

4.2 Tipos de discontinuidades

Ejercicios 4.2.1

1. Bosqueje la gráfica de una función f que cumpla las siguientes condiciones:

   a. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2;$

   b. $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty;$

   c. $f(1) = 0;$

   d. $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty;$

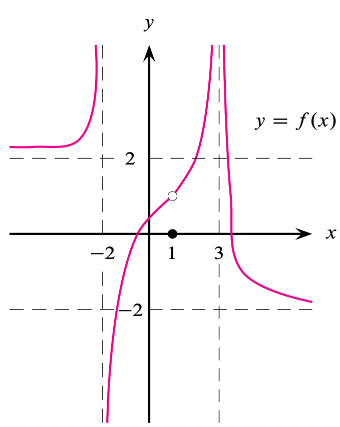
   e. $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty;$

   f. $f(x)$ tiene discontinuidad removible en $x = 1;$

   g. $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty;$

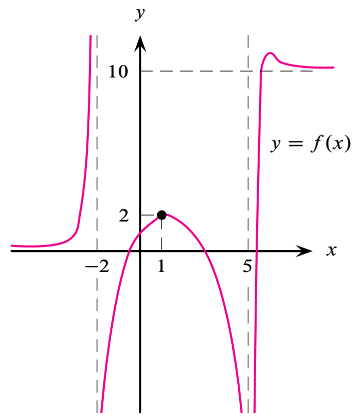
   h. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = -2.$

▼ Una gráfica que cumple las anteriores condiciones es:



□

2. Considere la gráfica de la función f dada en la figura



De la gráfica determine los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;
b. $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$;
c. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$;
d. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$;
e. $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$;
f. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$;
g. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Clasifique las discontinuidades.

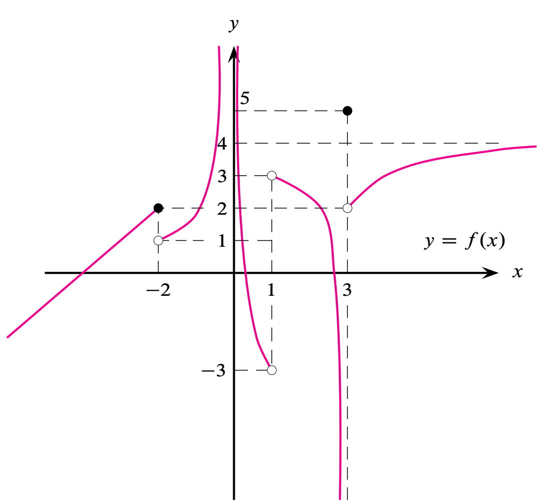
▼

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;
b. $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = -\infty$;
c. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) = 2$;
d. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$;
e. $\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = -\infty$;
f. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$;
g. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 10$;

La función tiene dos discontinuidades esenciales infinitas, en $x = -2$ y en $x = 5$.

□

3. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. De la gráfica obtener

i. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$;
ii. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$;
iii. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$;
iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;
v. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$;
vi. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$;
vii. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$;
viii. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$;
ix. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$;
x. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

b. Del inciso anterior clasifique las discontinuidades de la función y escriba las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.

▼

a. i. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 2$;
ii. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 1$;
iii. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$;
iv. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$;
v. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -3$;
vi. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$;
vii. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$;
viii. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$;
ix. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$;
x. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 4$.

b. En $x = -2$ y en $x = 1$ hay discontinuidad esencial de salto;
en $x = 0$ y en $x = 3$ hay discontinuidades esenciales infinitas;
$y = 4$ es asíntota horizontal;
$x = 0$ es asíntota vertical;
$x = 3$ es asíntota vertical.

□

4. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 1; \\ 4 & \text{si } x = 1; \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 < x \le 2; \\ 3 & \text{si } 2 < x\,. \end{cases}$$

Analizar los tipos de discontinuidades en $x = 1$ y en $x = 2$.

▼ Calculamos

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x - 3) = \lim_{x\to 1^-} 2x - 3 = 2 - 3 = -1\,;$$
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 - 2) = \lim_{x\to 1^+} x^2 - 2 = 1 - 2 = -1\,.$$

Como

$$\lim_{x\to 1} g(x) = -1 \neq g(1) = 4,$$

entonces en $x = 1$ la función g tiene una discontinuidad removible y, si redefinimos $g(1) = -1$, entonces la función g se hace continua en $x = 1$.

También

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - 2) = \lim_{x\to 2^-} x^2 - 2 = 4 - 2 = 2\,;$$
$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+} 3 = 3\,.$$

Como

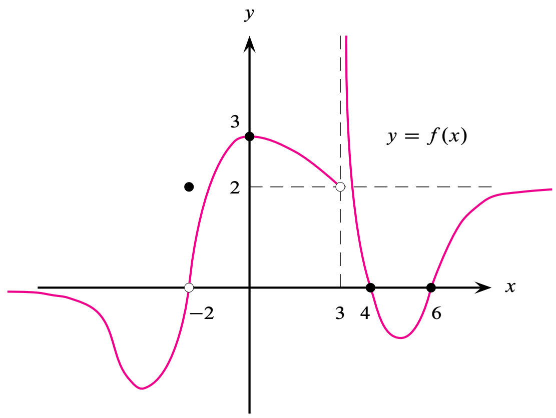
$$\lim_{x\to 2^-} g(x) \neq \lim_{x\to 2^+} g(x)\,,$$

entonces en $x = 2$ la función g tiene una discontinuidad esencial de salto. □

5. Trace la gráfica de una función f que tenga una discontinuidad removible en $x = -2$ y que además satisfaga las condiciones siguientes:

   a. $f(0) = 3$;
   b. $f(4) = 0$;
   c. $f(6) = 0$;
   d. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$;
   e. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$;
   f. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$;
   g. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

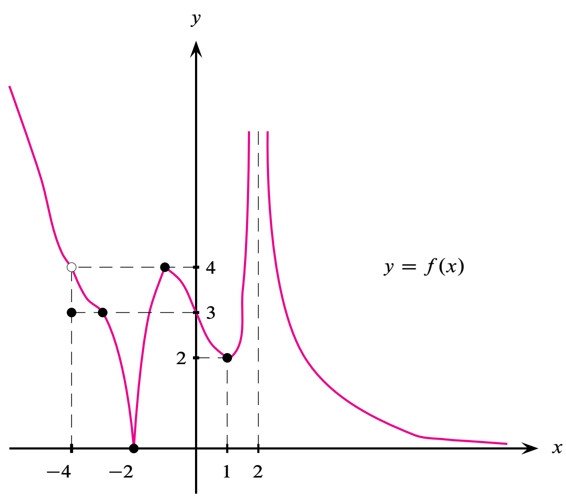
▼ Una posible gráfica de la función f que satisfaga todas esas condiciones es:



En nuestra gráfica vemos que $f(-2) = 2$, pero $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$, por lo que en $x = -2$ tiene f una discontinuidad removible. □

6. A partir de la gráfica de f, determine:

   a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
   b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y las ecuaciones de las asíntotas horizontales.



▼

   a. f tiene una discontinuidad removible en $x = -4$;
      f es discontinua en $x = 2$ donde tiene una discontinuidad infinita.
   b. $x = 2$ es la única asíntota vertical & $y = 0$ la única asíntota horizontal.

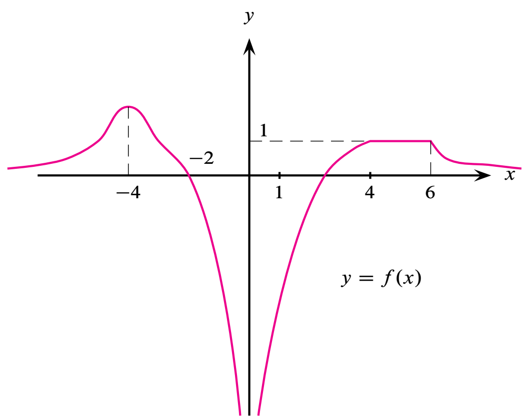
□

7. Bosqueje una posible gráfica de una función f que cumpla con las siguientes condiciones:

a. $f(x) = 1$ si $4 < x < 6$;
b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
c. $f(-2) = 0$;
d. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$;
e. $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 1$.

Señale los puntos de discontinuidad esencial.

▼ Un bosquejo de la gráfica de la función f es:



En $x = 0$ hay una discontinuidad esencial infinita. □

8. Si $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$, ¿qué tipo de discontinuidad hay en $x = 0$?; ¿esencial?; ¿removible? Justifique su respuesta.

▼ Calculemos $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ racionalizando el denominador, es decir, multiplicando arriba y abajo por el binomio conjugado del denominador, que es $\sqrt{x+1}+1$:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} =$$
$$= \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \sqrt{x+1}+1, \text{ si } x \neq 0\,.$$

Tenemos entonces que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}+1) = \sqrt{0+1}+1 = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2\,.$$

Si definiésemos $f(0) = 2$, la función f resultaría continua en 0, por lo que la discontinuidad es removible.

□

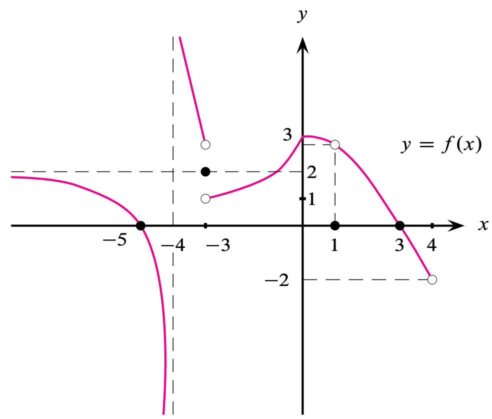
9. Sea $(-\infty, 4) - \{-4\}$ el dominio de una función f. Trace una posible gráfica de esa función que cumpla con las condiciones siguientes:

a. Los puntos $(-3, 2)$, $(-5, 0)$, $(1, 0)$ & $(3, 0)$ están en su gráfica.
b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.
c. $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = +\infty$.

d. $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -2$.

A partir de la gráfica, determine y clasifique los puntos de discontinuidad de la función f.

▼ Una gráfica posible es la siguiente:

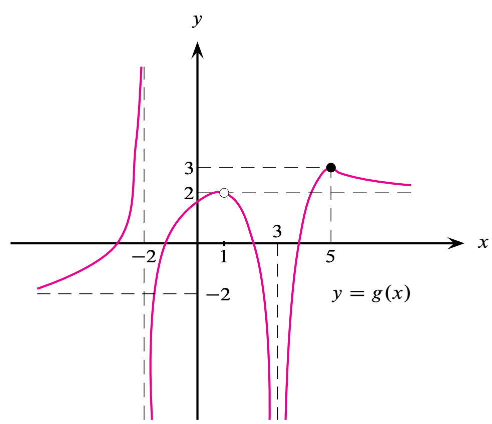


La función f tiene discontinuidades en:

$x = -4$ que es esencial infinita; $x = -3$ que es esencial de salto; $x = 1$ que es removible.

□

10. A partir de la gráfica de la función g que observamos a continuación



determine:

a. $\lim_{x\to -2^-} g(x)$;

b. $\lim_{x\to -2^+} g(x)$;

c. $\lim_{x\to -2} g(x)$;

d. $\lim_{x\to 1} g(x)$;

e. $\lim_{x\to -\infty} g(x)$;

f. $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

Puntos de discontinuidad y su clasificación.

Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

▼ Vemos que:

a. $\lim_{x\to -2^-} g(x) = +\infty$;

b. $\lim_{x\to -2^+} g(x) = -\infty$;

c. $\lim_{x\to -2} g(x)$ no existe ;

d. $\lim_{x\to 1} g(x) = 2$;

e. $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -2$;

f. $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 2$.

Puntos de discontinuidad: esenciales infinitas en $x = -2$ & $x = 3$ y removible en $x = 1$.

Asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ & $x = 3$.

Asíntotas horizontales: las rectas $y = -2$ & $y = 2$.

□

11. Sea la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}.$$

Encontrar y clasificar las discontinuidades. Determinar las asíntotas verticales y horizontales.

▼ Continuidad:

Por ser una función racional su dominio es:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^2 + 2x - 8 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, (x+4)(x-2) = 0 \right\} = \\ = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x + 4 = 0 \text{ o bien } x - 2 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{-4, 2\}.$$

Entonces la función f es discontinua en $x = -4$ y en $x = 2$.

Como

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-2)} = \\ = \lim_{x\to -4} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-4-3}{-4-2} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6},$$

esta función tiene en $x = -4$ una discontinuidad removible o evitable.

Y como

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x-2} = \infty,$$

entonces tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial infinita.

Asíntotas:

Precisemos los límites laterales en torno a $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \ ?$$

$$x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0 \,\&\, x - 3 < -1 \Rightarrow x - 2 < 0 \,\&\, x - 3 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x-3}{x-2} > 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x-2} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \ ?$$

$$x \to 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0 \,\&\, x - 3 < 0 \text{ ya que } x - 3 \to -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x-3}{x-2} < 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x-2} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty.$$

Podemos afirmar que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de f y además es la única.

Ahora bien como

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \dfrac{3}{x}}{1 - \dfrac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal y además es la única ya que también

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1.$$

□

12. Dada $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 + 4x - 5}$, obtener:

   a. Puntos de discontinuidad y su clasificación.
   b. Asíntotas verticales y horizontales.
   c. Esbozo de la gráfica.

▼

a. Como

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \text{ o bien } x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -5 \text{ o bien } x = 1,$$

resulta que el dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{-5, 1\}$.

Calculemos $\lim_{x\to-5} f(x)$ & $\lim_{x\to1^\pm} f(x)$.

Se tiene

$$f(x) = \frac{x(x+5)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x}{x-1}.$$

Por lo que

$$\lim_{x\to-5} f(x) = \lim_{x\to-5} \frac{x}{x-1} = \frac{-5}{-5-1} = \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$$

y la discontinuidad en $x = -5$ es removible.

En cambio

$$\lim_{x\to1^\pm} f(x) = \lim_{x\to1^\pm} \frac{x}{x-1} = \pm\infty$$

y la discontinuidad en $x = 1$ es esencial infinita.

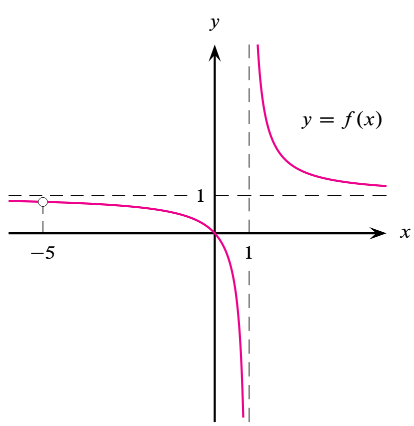
b. Acabamos de encontrar que la recta $x = 1$ es asíntota vertical. Para hallar las asíntotas horizontales calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por lo que la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

c. Tabulamos $f(0) = 0$.

La gráfica de la función f es:

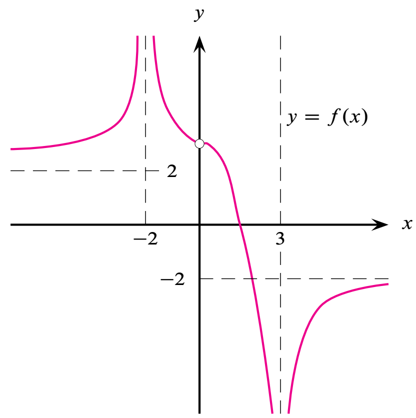


□

13. Dibujar la gráfica posible de la función f que cumpla las condiciones siguientes:

   a. $\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty$;
   b. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$;
   c. $f(x)$ tiene una discontinuidad removible en $x = 0$;
   d. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$;
   e. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -2$.

▼ Una gráfica posible de la función f, con esas condiciones es:



□

4.3 Continuidad en intervalos

Ejercicios 4.3.1

1. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$; demuestre que hay, al menos, un número a entre 0 & 10 tal que $f(a) = 500$.

▼ Calculamos

$$f(0) = -9;$$
$$f(10) = 10^3 - 5\times 10^2 + 7\times 10 - 9 = 1\,000 - 500 + 70 - 9 = 561.$$

Puesto que $f(x)$ es una función polinomial, entonces es continua y, por el teorema de Valor Intermedio, se sabe que f toma todos los valores del intervalo $[-9, 561]$ cuando la variable x recorre el intervalo $[0, 10]$.

En particular $500 \in (-9, 561)$, entonces existe $a \in (0, 10)$ tal que $f(a) = 500$. □

2. El costo de fabricación de q automóviles eléctricos, en miles de pesos, es de

$$C(q) = 5q^3 + 13q^2 + 14\,;$$

mientras que el ingreso, también en miles de pesos, es de

$$I(q) = q^4 - 5q\,.$$

Demostrar que existe un valor entre 2 & 10, de la variable q, donde la fábrica ni gana ni pierde.

▼ La ganancia de la fábrica $G(q)$ cuando se fabrican q automóviles viene dada por

$$\begin{aligned} G(q) &= I(q) - C(q) = \\ &= (q^4 - 5q) - (5q^3 + 13q^2 + 14) = \\ &= q^4 - 5q^3 - 13q^2 - 5q - 14\,. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
G(2) &= 2^4 - 5 \times 2^3 - 13 \times 2^2 - 5 \times 2 - 14 = \\
&= 16 - 40 - 52 - 10 - 14 = \\
&= -100 \\
G(10) &= 10^4 - 5 \times 10^3 - 13 \times 10^2 - 5 \times 10 - 14 = \\
&= 10\,000 - 5\,000 - 1\,300 - 50 - 14 = \\
&= 5\,000 - 1\,364 = 3\,636\,.
\end{aligned}$$

Puesto que $G(q)$ es una función continua, por el teorema del Valor Intermedio, la función toma todos los valores del intervalo $[-100, 3\,636]$ cuando q recorre el intervalo $[2, 10]$.

En particular

$$0 \in [-100, 3\,636]\,.$$

Por lo tanto, existe

$$q \in [2, 10] \text{ tal que } G(q) = 0\,.$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
I(q) - C(q) &= 0\,; \\
I(q) &= C(q)\,.
\end{aligned}$$

Si el ingreso es igual al costo de producción, la fábrica ni gana ni pierde.

□

3. Sea $f\colon [1, 3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x$. ¿Existe un punto $a \in [1, 3]$ tal que $f(a) = -15$? Justifique su respuesta.

▼ $f(1) = 1 - 2 - 10 = -11$ & $f(3) = 27 - 18 - 30 = -21\,.$

Como $-15 \in [-21, -11]$ y como la función es continua en $[1, 3]$, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos un punto $a \in (1, 3)$ tal que $f(a) = -15$.

□

4. La temperatura T (en °C) a la que el agua hierve está dada por la fórmula

$$T(h) = 100.862 - 0.0415\sqrt{h + 431.03}\,,$$

donde h es la altura sobre el nivel del mar (medida en metros).

Use el teorema del Valor Intermedio y diga si entre los 4 000 y 4 500 metros sobre el nivel del mar hay una altitud a la cual hierve a 98°C. Justifique su respuesta.

▼ Por un lado sabemos que la función T es continua en su dominio, el cual es el conjunto de los h que cumplen

$$h + 431.03 \ge 0 \;\Rightarrow\; h \ge -431.03 \text{ m};$$

por otro lado

$$T(4\,000) = 100.862 - 0.0415\sqrt{4\,000 + 431.03} \approx 98.099512\,^{\circ}\text{C};$$

también

$$T(4\,500) = 100.862 - 0.0415\sqrt{4\,500 + 431.03} \approx 97.977517\,^{\circ}\text{C}.$$

Como $98 \in (97.9, 98.1)$ °C, entonces, efectivamente, existe una $h \in (4\,000, 4\,500)$ tal que $T(h) = 98\,^{\circ}$C.

□

5. Verifique que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre 0 & 1. Dé un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ que contenga a dicha raíz.

▼ Sea $f(x) = x^3 + x - 1$.

Notamos que la función f es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0, 1]$ y que $f(0) = -1 < 0$ y también que $f(1) = 1 > 0$; luego, por el teorema del Valor Intermedio, en $(0, 1)$ habrá un punto x tal que $f(x) = 0$.

Vemos que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 < 0$.

Por lo que una raíz debe estar en $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

También vemos que $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 > 0$.

Por lo que, por último, tal raíz debe de estar en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Este último intervalo tiene longitud $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$.

□

6. Determinar un intervalo de longitud 0.5 que contenga a una raíz de la ecuación $x^3 + 2x + 4 = 0$.

▼ Sea $f(x) = x^3 + 2x + 4$, la cual por ser polinomial es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Vemos ahora que $f(0) = 4$; $f(-1) = -1 - 2 + 4 = 1$; $f(-2) = -8 - 4 + 4 = -8$.

Ya que $f(-2) = -8 < 0$ y que $f(-1) = 1 > 0$, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos una raíz en el intervalo $(-2, -1)$.

El punto medio del intervalo $(-2, -1)$ es $-\frac{3}{2}$ y como $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - 3 + 4 = 1 - \frac{27}{8} = -\frac{19}{8} < 0$, entonces existe al menos una raíz en el intervalo $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$.

Ya que la longitud del intervalo $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ es $\frac{1}{2}$, se puede afirmar que $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ es un intervalo de longitud 0.5 que contiene al menos una raíz de la ecuación $x^3 + 2x + 4 = 0$.

□

7. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } -2 \le x < 0; \\ -(x^2 + 2) & \text{si } 0 \le x \le 2\,. \end{cases}$$

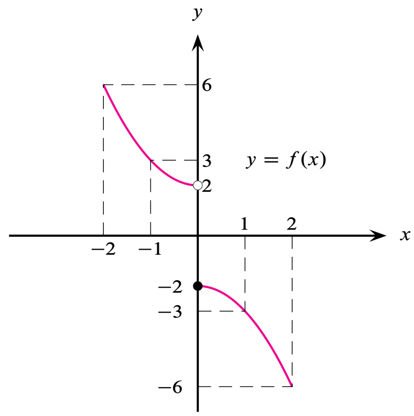
a. Calcular $f(-2)$ & $f(2)$.

b. ¿Existe $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$?

▼

a.
$$f(-2) = (-2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6\,;$$
$$f(2) = -(2^2 + 2) = -(4 + 2) = -6\,.$$

b. Considerando un bosquejo de la gráfica que se muestra a continuación, se puede observar que no existe un valor de $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$.



Observe que la función f no es continua en $[-2, 2]$ pues es discontinua en $x = 0$, por lo que no cumple con las hipótesis del teorema del Valor Intermedio.

□

8. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 4x + 2$. Aproxime en el intervalo $[1, 2]$ una raíz del polinomio con error menor que $\frac{1}{4}$.

▼ Calculamos el valor del polinomio en los extremos del intervalo

$$p(1) = 1^3 - 4 \times 1 + 2 = 1 - 4 + 2 = -1\,;$$
$$p(2) = 2^3 - 4 \times 2 + 2 = 8 - 8 + 2 = 2\,.$$

Ya que el polinomio es una función continua, por el teorema del Valor Intermedio, toma todos los valores entre $[-1, 2]$ cuando x recorre el intervalo $[1, 2]$.

En particular $0 \in [-1, 2]$.

Entonces existe $c \in (1, 2)$ tal que $p(c) = 0$ (una raíz del polinomio).

El intervalo $[1, 2]$ tiene longitud $2 - 1 = 1$.

Se desea un intervalo de longitud menor que $\frac{1}{4} = 0.25$ donde se garantice la existencia de una raíz.

Para esto, tomamos arbitrariamente un número c_1 a la derecha de 1 y otro número c_2 que cumpla las condiciones $1 < c_1 < c_2 < 2$; comprobamos si continúa existiendo un cambio de signo al evaluar el polinomio en estos puntos.

Tomemos $c_1 = 1.3$ y $c_2 = 1.6$:

$$p(1.3) = (1.3)^3 - 4(1.3) + 2 = 2.197 - 5.2 + 2 = -1.003\,;$$
$$p(1.6) = (1.6)^3 - 4(1.6) + 2 = 4.096 - 6.4 + 2 = -0.304\,.$$

Ambos valores negativos.

Para intentar alcanzar un valor positivo del polinomio, los calculos anteriores sugieren tomar, por ejemplo, $c_3 = 1.8$

$$p(1.8) = (1.8)^3 - 4(1.8) + 2 = 5.832 - 7.2 + 2 = 0.632\,.$$

Es decir, la función cambia de signo en los extremos del intervalo $[1.6, 1.8]$.

Esto garantiza que existe una raíz dentro de este intervalo.

Lo longitud de $[1.6, 1.8]$ es $1.8 - 1.6 = 0.2 < \frac{1}{4} = 0.25$.

Si tomamos un punto arbitrario dentro de este intervalo como una aproximación a la raíz, podemos asegurar que la diferencia entre dicho punto y la raíz existente es menor que un cuarto.

□

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(-10) = -4$, $f(-3) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2) = 8$ y que $f(4) = -5$.

   Determine el número de raíces que, al menos, tiene la función f y en qué intervalos se encuentran.

   ▼ Ya que $f(-10) = -4$ y que $f(-3) = 2$, entonces $f(-10) < 0$ & $f(-3) > 0$; por lo tanto, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos una raíz en el intervalo $(-10, -3)$.

   Análogamente $f(2) = 8$ & $f(4) = -5$ implican que $f(2) > 0$ y que $f(4) < 0$; de nuevo, por el teorema del Valor Intermedio, existe al menos una raíz en el intervalo $(2, 4)$.

   Luego, la función f tiene al menos tres raíces en el intervalo $(-10, 4)$ pues $x = 1$ también es raíz.

   □

10. Verifique que la ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $[2, 3]$ y determine un intervalo de longitud $1/4$ que contenga a dicha raíz.

    ▼ La función polinomial $f(x) = x^3 - 4x - 2$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular es continua en el intervalo cerrado $[2, 3]$. Además

$$f(2) = 2^3 - 4(2) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2 < 0;$$
$$f(3) = 3^3 - 4(3) - 2 = 27 - 12 - 2 = 13 > 0.$$

Por ser f continua en el intervalo $[2, 3]$, $f(2) < 0$ & $f(3) > 0$, se puede asegurar (por el teorema del Valor Intermedio) la existencia de al menos un $c \in (2, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

Notamos que la longitud del intervalo $(2, 3)$ es 1.

El punto medio del intervalo $(2, 3)$ es $\dfrac{5}{2}$ y además

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = \frac{125}{8} - 10 - 2 = \frac{125 - 96}{8} = \frac{29}{8} > 0.$$

Por ser f continua en el intervalo $\left[2, \dfrac{5}{2}\right]$, $f(2) < 0$ & $f\left(\dfrac{5}{2}\right) > 0$, se puede asegurar, por el teorema del Valor Intermedio, la existencia de al menos un $c \in \left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

Notemos que la longitud del intervalo $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ es $\dfrac{1}{2}$.

El punto medio del intervalo $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ es $\dfrac{9}{4}$ y además

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}\right)^3 - 4\left(\frac{9}{4}\right) - 2 = \frac{729}{64} - 9 - 2 = \frac{729 - 704}{64} = \frac{25}{64} > 0.$$

Por ser f continua en el intervalo cerrado $\left[2, \dfrac{9}{4}\right]$, $f(2) < 0$ & $f\left(\dfrac{9}{4}\right) > 0$, se puede asegurar, por el teorema del Valor Intermedio, la existencia de al menos un $c \in \left(2, \dfrac{9}{4}\right)$ tal que $f(c) = 0$.

Además la longitud del intervalo $\left(2, \dfrac{9}{4}\right)$ es $\dfrac{1}{4}$.

Por lo tanto, en el intervalo $\left[2, \dfrac{9}{4}\right]$, de longitud $\dfrac{1}{4}$ existe al menos un número real x tal que $x^3 - 4x - 2 = 0$.

□

11. Determine un intervalo de longitud $\dfrac{1}{4}$ en el que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tenga una raíz.

▼ Consideramos la función polinomial $f(x) = x^3 - 3x + 1$ que es continua en toda la recta real.

$$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 1 = 1 \,\&\, f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = 2 - 3 = -1.$$

Ya que $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ & f es continua en el intervalo $[0, 1]$, por el teorema del Valor Intermedio, se puede asegurar la existencia de al menos un real $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$. Notemos además que la longitud del intervalo $(0, 1)$ es $\ell_1 = 1$.

El punto medio del intervalo $(0, 1)$ es $\dfrac{1}{2}$,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{1 - 12 + 8}{8} = -\frac{3}{8}.$$

Ya que $f(0) = 1 > 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8} < 0$, y ya que la función f es continua en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, se puede asegurar la existencia de al menos un real $c \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$. Notemos además que la longitud del intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ es $\ell_2 = \dfrac{1}{2}$.

El punto medio del intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ es $\dfrac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{64} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{1 - 48 + 64}{64} = \frac{17}{64}.$$

Ya que $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{17}{64} > 0$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{3}{8} < 0$ y que f es continua en el intervalo $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, se puede asegurar (por el teorema del Valor Intermedio) la existencia de al menos un real $c \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ tal que $f(c) = 0$. Notemos también que la longitud del intervalo $\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ es $\ell_3 = \dfrac{1}{4}$.

Luego, para la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$, existe al menos una raíz [$c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$] en el intervalo $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$ que tiene una longitud $\ell = \dfrac{1}{4}$. □

12. Considere la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{4} - x^2 - 1$. Pruebe que esa función tiene al menos una raíz positiva y otra negativa.

▼ Vemos que:

$$f(0) = -1 < 0;$$
$$f(2) = \frac{64}{6} + \frac{16}{4} - 4 - 1 = \frac{32}{3} + 4 - 4 - 1 = \frac{32 - 3}{3} > 0.$$

Luego, entre 0 y 2 existe una raíz positiva, pues $f(x)$ es polinomial, por lo que es continua en todo intervalo en particular en $[0, 2]$.

Como $f(-2)$ también es positiva (f es par), por el teorema del Valor Intermedio, entre -2 & 0 hay otra raíz que tiene que ser negativa. □

13. Encuentre un intervalo en donde la función $h(x) = -2x^5 - 7x + 1$ tiene una raíz.

▼ Siendo h una función polinomial, cumple con la hipótesis de continuidad del teorema del Valor Intermedio en toda la recta; además

$$h(0) = 1 > 0 \,\&\, h(1) = -2 - 7 + 1 < 0;$$

entonces entre 0 & 1 existe al menos una raíz de la función, es decir, un punto x tal que

$$-2x^5 - 7x + 1 = 0.$$

□

14. Un polinomio pasa por los puntos $(-5, 10)$, $(2, 3)$ y $(17, -1)$.

¿Cuántas raíces tiene como mínimo? Justifique su respuesta.

▼ Una, ya que siendo continua en toda la recta, la función polinomial $p(x)$ es positiva en 2, puesto que $p(2) = 3$, y es negativa en 17 ya que $p(17) = -1$; por lo que entre 2 y 17 la función tiene al menos una raíz, por el teorema del Valor Intermedio. □

15. Muestre que la función $h(x) = x^5 + x - 5$ tiene al menos una raíz en los números reales.

▼ Valuando en dos puntos pertinentes:

$$h(0) = -5 < 0 \ \& \ h(2) = 2^5 + 2 - 5 = 29 > 0.$$

Tenemos una función $h(x)$ que por ser polinomial es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo $[0, 2]$ en cuyos extremos la función tiene valores con signo distinto. Usando el teorema del Valor Intermedio se sabe que existe al menos un valor $c \in (0, 2)$ tal que $h(c) = 0$, que es lo que se quería mostrar. □

16. Halle un intervalo de longitud no mayor que 0.1 donde se encuentre una raíz del polinomio:

$$\rho(x) = -x^4 + 16x^3 - 60x^2 + 1.$$

▼ Por ser un polinomio $\rho(x) = -x^4 + 16x^3 - 60x^2 + 1$, es una función continua en todo $\mathbb{R}$.

Ahora bien $\rho(0) = 1 > 0$ & $\rho(1) = -44 < 0$; entonces, por el teorema del Valor Intermedio, podemos asegurar la existencia de al menos un $0 < c < 1$ tal que $\rho(c) = 0$.

El punto medio del intervalo $(0, 1)$ es $x = \dfrac{1}{2}$ & $\rho\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{16} - 12 < 0$, por lo cual se puede asegurar que $0 < c < \dfrac{1}{2}$.

El punto medio del intervalo $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ es $x = \dfrac{1}{4}$ & $\rho\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{4^4} - \dfrac{5}{2} < 0$, por lo cual se puede asegurar que $0 < c < \dfrac{1}{4}$.

El punto medio del intervalo $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ es $x = \dfrac{1}{8}$ & $\rho\left(\dfrac{1}{8}\right) = -\dfrac{1}{8^4} + \dfrac{3}{32} > 0$, lo que permite asegurar que $\dfrac{1}{8} < c < \dfrac{1}{4}$.

El punto medio del intervalo $\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}\right)$ es $x = \dfrac{3}{16}$ & $\rho\left(\dfrac{3}{16}\right) = -\dfrac{81}{16^4} - \dfrac{257}{16^2} < 0$, por lo cual podemos asegurar que $\dfrac{1}{8} < c < \dfrac{3}{16}$. Además la longitud del intervalo $\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{16}\right)$ es $\ell = \dfrac{1}{16}$ que es menor que $0.1 = \dfrac{1}{10}$. Por lo tanto el intervalo buscado es $\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{16}\right)$. □

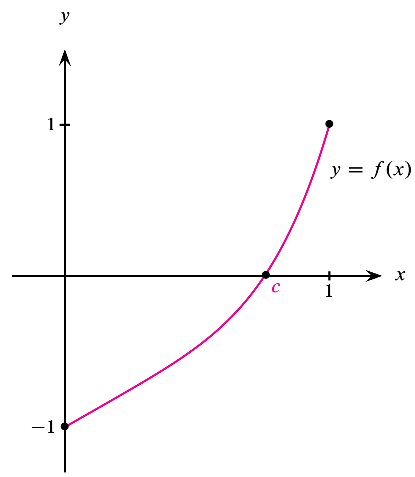
17. Dada la función $f(x) = x^5 + x - 1$, verifique que existe un número c tal que $f(c) = 0$. Es decir, justifique que la función tiene una raíz.

▼ Evaluamos la función f en algunos puntos:

x	$f(x)$
0	-1
1	1.

Vemos que f es una función continua en el intervalo $[0, 1]$ con valores de signo distinto en los extremos; aplicando el teorema del Valor Intermedio, se asegura la existencia de $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

Veámos la gráfica de f en ese intervalo:



□

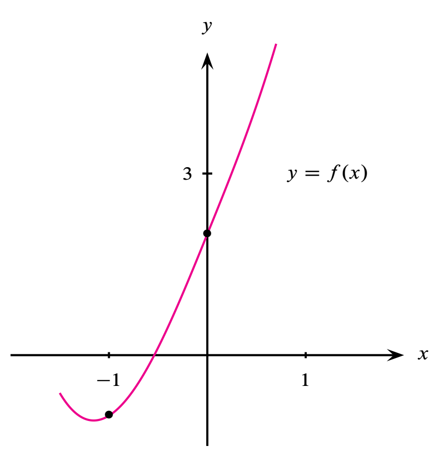
18. Dada la función $f(x) = -x^3 + 4x + 2$, obtener un intervalo en donde la función tenga al menos una raíz. Justifique su respuesta.

▼ Evaluamos f en algunos números

x	$f(x) = -x^3 + 4x + 2$
-1	-1
0	2

con lo que comprobamos que f siendo continua cambia de signo en el intervalo $[-1, 0]$. Usando el teorema del Valor Intermedio se garantiza que existe una raíz de f en ese intervalo.

Veamos la gráfica de la función f:



El resultado garantiza la existencia de la raíz, no la calcula. Se garantiza el corte de la gráfica con el eje x. No se sabe dónde. □

19. Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-6x+8} & \text{si } x \neq 2 \text{ y } x \neq 4; \\ 1 & \text{si } x = 2\,; \end{cases}$$

determine:

a. Dominio y raíces.
b. Intervalos de continuidad y clasificación de discontinuidades.
c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
d. Bosquejo gráfico.

▼

a. Dominio: $D_g = \mathbb{R} - \{\,4\,\}$.
Raíces: nos damos cuenta de que para $x \neq 2$

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2-6x+8} = \frac{x-2}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{x-4}\,;\, g(2) = 1$$

con lo cual concluimos que la función no tiene raíces.

b. La función no es continua en $x = 2$ ya que

$$g(2) = 1;$$

y que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Como $g(2) \neq \lim\limits_{x\to 2} g(x)$, en $x = 2$ $g(x)$ tiene una discontinuidad removible.
La función tampoco es continua en $x = 4$, ya que $g(4)$ no existe pues $4 \notin D_g$.
Aún más:
Si x está a la derecha de 4,

$$x > 4 \;\Rightarrow\; x - 4 > 0;$$
$$\lim_{x\to 4^+} g(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty.$$

Si x está a la izquierda de 4,

$$x < 4 \;\Rightarrow\; x - 4 < 0;$$
$$\lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty.$$

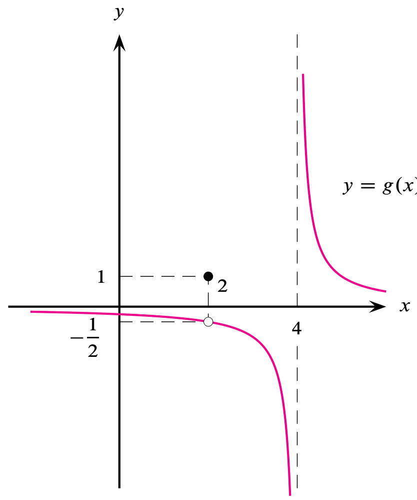
Por lo que g tiene una discontinuidad esencial infinita en $x = 4$.
Entonces esta función es continua en $\mathbb{R} - \{\,2, 4\,\} = (-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$.

c. Por lo anterior se ve que $x = 4$ es una asíntota vertical.
Si calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-4} = 0,$$

vemos que $y = 0$ es una asíntota horizontal.

d. Su gráfica es:



□

20. Considere la función:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-4}{2-x} & \text{si } x \neq 2; \\ 3 & \text{si } x = 2; \end{cases}$$

determine:

a. Dominio y raíces.
b. Intervalos de continuidad y clasificación de sus discontinuidades.
c. Ecuaciones de sus asíntotas verticales y horizontales.
d. Bosquejo gráfico.

▼

a. Dominio: $D_g = \mathbb{R}$.
Raíces: vemos que g no tiene raíces, puesto que

$$\frac{2x-4}{2-x} = \frac{-2(2-x)}{2-x} = -2 \quad \text{si } x \neq 2 \ \& \ g(2) = 3.$$

b. La función tiene una discontinuidad removible en $x = 2$, ya que

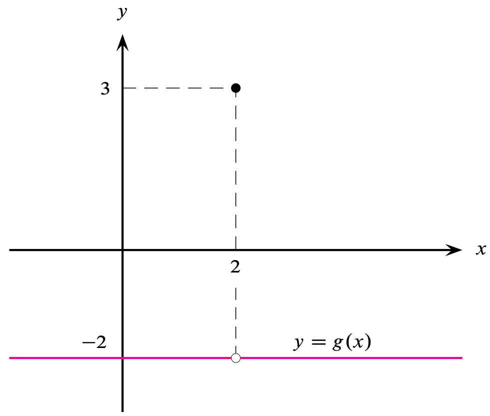
$$\lim_{x \to 2} g(x) = -2 \quad \text{pero } g(2) = 3\,.$$

Entonces la función es continua en $\mathbb{R} - \{\,2\,\}$.

c. La función no tiene asíntotas verticales & $y = -2$ es asíntota horizontal, ya que

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (-2) = -2.$$

d. Su gráfica es:



□

21. Para la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2}$, determine:

a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
b. Los intervalos de continuidad.
c. Las asíntotas verticales y horizontales.
d. Por último esboce su gráfica.

▼

a. Sabemos que

$$x^2 + x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2\,. \end{cases}$$

Entonces $-2 \notin D_f$ & $1 \notin D_f$.
En $x = 1$ hay una discontinuidad esencial, ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, de hecho en (c) veremos que $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} f(x) = \mp\infty$, entonces la discontinuidad es esencial infinita.
En $x = -2$ hay una discontinuidad removible, pues

$$\frac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \frac{3(x-2)}{x-1} \text{ si } x \neq -2\,.$$

Encontramos que $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existe:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{3(x-2)}{x-1} = \frac{3(-4)}{-3} = 4\,.$$

Si definiésemos $f(-2) = 4$, $f(x)$ resultaría continua en $x = -2$.

b. De lo anterior $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$.

c. Calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 - \dfrac{12}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3 - \dfrac{12}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{12}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x^2}} = \frac{3 - 0}{1 + 0 - 0} = \frac{3}{1} = 3\,.$$

Entonces $y = 3$ es asíntota horizontal.
Como

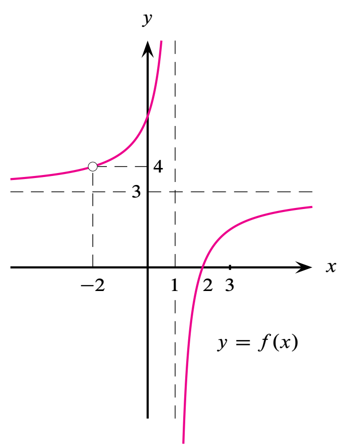
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2 - 12}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x^2 - 4)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3(x-2)}{(x-1)} = +\infty,$$

ya que $x - 1 < 0$, $\quad x - 2 < 0$, $\quad \lim_{x\to 1^-}(x-1) = 0^-$ & $\lim_{x\to 1^-} 3(x-2) = -3 \neq 0$,
y también que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2 - 12}{(x-1)(x+2)} = -\infty\,,$$

entonces $x = 1$ es una asíntota vertical.
(Comprobamos que en $x = 1$, la discontinuidad es esencial infinita).

d. Observemos que $f(2) = 0$. La gráfica es:



□

22. Considere la función $g(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 - 4}$.

a. Obtener las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de esta función g.
b. Encontrar el dominio, las raíces y los intervalos de continuidad de la función.
c. Bosquejar su gráfica.

▼

a. Para averiguar las posibles asíntotas horizontales, calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{4}{x^2}} = \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2\,.$$

Entonces la recta $y = 2$ es asíntota horizontal.

Como

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \text{ \& } 2x^2 + 1 > 0 \text{ para cada } x,$$

calculamos

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{2x^2 + 1}{(x+2)(x-2)} = \pm\infty.$$

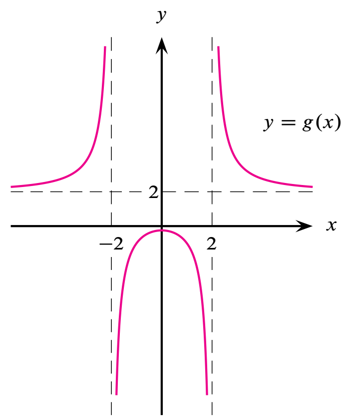
Entonces $x = 2$ es asíntota vertical, y como la función es par, $x = -2$ también lo es.

b. Dominio: $D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

No tiene raíces, pues el numerador $2x^2 + 1 > 0$ para cualquier valor de x en el dominio de g; esta función es continua en $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

c. Adicionalmente $g(0) = \dfrac{1}{-4} = -\dfrac{1}{4}$.

Su gráfica es:



□

23. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}$.

a. Determinar dominio y raíces.

b. Hallar intervalos de continuidad y clasificar las discontinuidades.

c. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

d. En base a lo anterior, hacer el esbozo gráfico de f.

▼

a. Por ser f una función racional, su dominio es:

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^2 + x - 2 = 0 \right\} = \\ &= \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, (x+2)(x-1) = 0 \right\} = \\ &= \mathbb{R} - \{-2, 1\} . \end{aligned}$$

Raíces: para $x \in D_f$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ o bien $x = 4$. Pero $x = 1 \notin D_f$, por lo cual f tiene sólo una raíz que es $x = 4$.

b. Por ser una función racional, es continua en todo su dominio; es decir, f es continua en el conjunto $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

Las discontinuidades de f están en $x = -2$ y en $x = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2} = \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x+2)(x-1)} = \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x-4}{x+2} = \\ &= \frac{1-4}{1+2} = \frac{-3}{3} = -1 . \end{aligned}$$

Entonces f tiene en $x = 1$ una discontinuidad evitable o removible.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x-4}{x+2} = \text{“}\left(\frac{-6}{0}\right)\text{”},$$

$$\text{ya que } (x+2) \to 0 \ \& \ (x-4) \to -6 \text{ cuando } x \to -2\,.$$

Por esto podemos decir que la función f tiene en $x = -2$ una discontinuidad esencial infinita.

c. Asíntotas verticales: precisamos $\lim_{x \to -2} f(x)$ vía sus límites laterales.

i. Si $x \to -2^-$, entonces $x < -2$, por lo que $x + 2 < 0$; y como $x - 4 < 0$ [ya que $(x - 4) \to -6$], entonces $\frac{x-4}{x+2} > 0$. Por lo tanto

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x-4}{x+2} = +\infty\,.$$

ii. Si $x \to -2^+$, entonces $x > -2$, por lo que $x + 2 > 0$; y como $x - 4 < 0$, entonces $\frac{x-4}{x+2} < 0$. Luego,

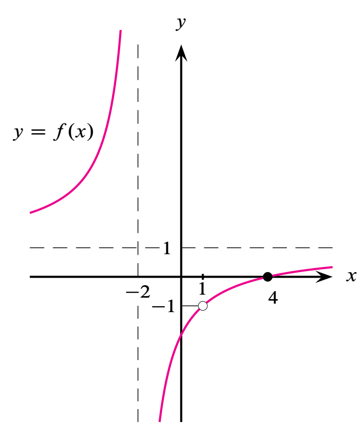
$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x-4}{x+2} = -\infty\,.$$

Podemos afirmar que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical de f, y que además es la única.
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-4}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de f. Además es la única ya que también $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

d. La gráfica de la función f es de la forma



□

24. Sea la función

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15}.$$

Encuentre: raíces, discontinuidades y su clasificación, asíntotas e intervalos de continuidad. Bosqueje su gráfica.

▼ Las raíces de la función g son los puntos de su dominio tales que $g(x) = 0$.

Sabemos que

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5) = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{ 3, 5 \} .$$

Para que $g(x) = 0$, se necesita que

$$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3) = 0 ,$$

es decir, que $x = 3$ o bien que $x = -4$.

Pero, como $x = 3 \notin D_g$, entonces la única raíz de $g(x)$ es $x = -4$.

Discontinuidades:

La función g es discontinua en $x = 3$ y en $x = 5$, por lo que es continua en su dominio

$$(-\infty, 3) \cup (3, 5) \cup (5, +\infty)$$

que son los tres intervalos de continuidad.

La discontinuidad en $x = 3$ es removible, ya que

$$\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+4}{x-5} = \frac{3+4}{3-5} = -\frac{7}{2} ;$$

si definimos $g(3) = -\dfrac{7}{2}$, la función g resulta continua también en 3.

En cambio en $x = 5$, la discontinuidad es esencial infinita, pues

$$\lim_{x\to 5^{\pm}} g(x) = \lim_{x\to 5^{\pm}} \frac{x+4}{x-5} = \text{“}\left(\frac{9}{0^{\pm}}\right)\text{”} = \pm\infty .$$

Asíntotas:

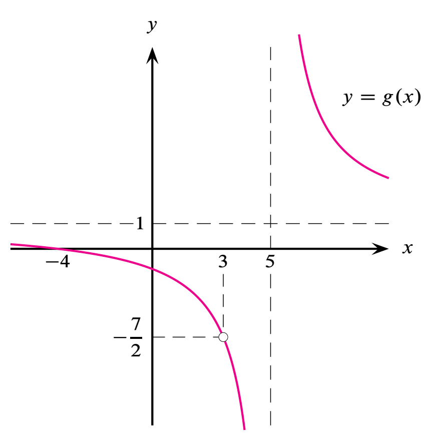
Por lo mismo vemos que $x = 5$ es asíntota vertical.

Para hallar las asíntotas horizontales calculemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{12}{x^2}}{1 - \dfrac{8}{x} + \dfrac{15}{x}} = 1$$

con lo que comprobamos que la recta $y = 1$ es la asíntota horizontal.

La gráfica de la función g es:



□

25. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 7x + 12}$.

    a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad.
    b. Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
    c. Haga un esbozo gráfico de la función f.

▼

a. Simplificamos:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 7x + 12} = \frac{(x + 4)(x - 1)}{(x + 4)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3} \text{ si } x + 4 \neq 0\,.$$

Entonces:
Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{-4, -3\}$.
Raíz: $x = 1$.
La función es continua en todo su dominio.
Como $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x - 1}{x + 3} = \dfrac{-4 - 1}{-4 + 3} = \dfrac{-5}{-1} = 5$ & $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x - 1}{x + 3} = \infty$, podemos afirmar que existe una discontinuidad removible en $x = -4$ y una discontinuidad esencial infinita en $x = -3$.

b. Calculamos el límite:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x - 1}{x + 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{3}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1\,.$$

Y encontramos que $y = 1$ es asíntota horizontal.
La ecuación de la asíntota vertical es $x = -3$. Para esto calculamos los límites laterales en $x = -3$:

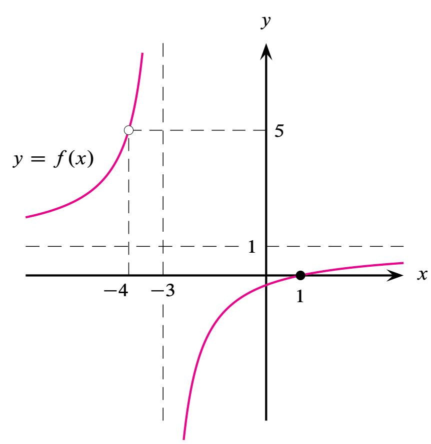
i. Por la derecha, es decir, si $x > -3 \Rightarrow x + 3 > 0$,

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x - 1}{x + 3} = \lim_{x \to -3^+} (x - 1) \times \lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x + 3} = (-4) \times \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”} = -\infty\,.$$

ii. Por la izquierda, es decir, si $x < -3 \Rightarrow x + 3 < 0$,

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x - 1}{x + 3} = \lim_{x \to -3^-} (x - 1) \times \lim_{x \to -3^-} \frac{1}{x + 3} = (-4) \times \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

c. La gráfica de la función es:



□

26. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$.

a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función f.
b. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función f.
c. Dibuje la gráfica y halle el rango de la función f.

▼

a. Dominio:

$$D_f = \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \,\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 1 \,\} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1 \,\};$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

Raíces: para $x \in D_f$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \text{ o bien } x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ o bien } x = 1.$$

Como $x = 1$ no está en el dominio de f, la función tiene sólo una raíz: $x = -2$.
Intervalos de continuidad: por ser f una función racional, es continua en todo su dominio; luego f es continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

b. Asíntotas verticales: analicemos los puntos de discontinuidad

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{1 + 2}{2 + 1} = \frac{3}{2};$$

la función f tiene en $x = 1$ una discontinuidad removible; por lo cual, la recta $x = 1$ no es una asíntota vertical. Ahora vemos que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x + 2}{x + 1} = \infty,$$

ya que

$$\lim_{x \to -1} (x + 1) = -1 + 1 = 0 \;\&\; \lim_{x \to -1} (x + 2) = -1 + 2 = 1.$$

Aún más:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x + 2}{x + 1} = -\infty, \text{ ya que } x + 2 > 0 \;\&\; x + 1 < 0, \text{ cuando } x \to -1^-.$$

También:

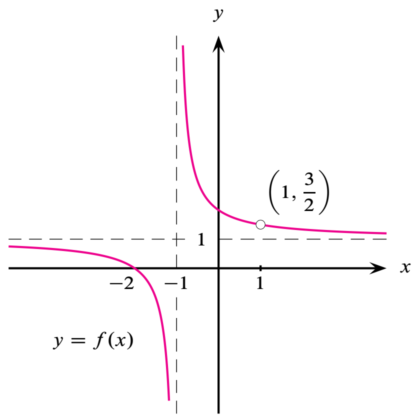
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x + 2}{x + 1} = +\infty, \text{ ya que } x + 2 > 0 \;\&\; x + 1 > 0, \text{ cuando } x \to -1^+.$$

Luego, la recta $x = -1$ es la única asíntota vertical.
Asíntotas horizontales: analicemos el comportamiento de f en el infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

De igual manera se obtiene que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
Luego, la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal.

c. Un bosquejo de la gráfica de la función f es



Rango: $R_f = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$.

□

27. Sea $f(x) = \dfrac{6x^3 + 3x^2 - 3x}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$, hallar:

a. Dominio y raíces.
b. Intervalos de continuidad, clasificando las discontinuidades.
c. Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
d. Esbozo gráfico de f.

▼

a. Dominio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 + 3x^2 - 2x \neq 0\}$.
Calculemos los ceros del denominador

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = 0\,;$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -2\,; \end{cases}$$

luego:

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = 2x(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x \in \left\{-2, 0, \frac{1}{2}\right\},$$

entonces:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{-2, 0, \frac{1}{2}\right\}.$$

Ahora para hallar las raíces observemos análogamente que

$$6x^3 + 3x^2 - 3x = 3x(2x^2 + x - 1) \text{ y que}$$

$$2x^2 + x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1\,; \end{cases}$$

por lo tanto,

$6x^3 + 3x^2 - 3x = 3x(2x^2 + x - 1) = 6x(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -1, 0$ o bien $\frac{1}{2}$.

Ya que ni 0 ni $\frac{1}{2}$ no pertenecen al dominio de f, su única raíz es $x = -1$.

b. Intervalos de continuidad: $(-\infty, -2)$,$(-2, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ & $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Para clasificar las discontinuidades calculemos

$$\lim_{x \to -2^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{6x^3 + 3x^2 - 3x}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{6x(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2x(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{3(x+1)}{x+2} = \pm\infty\,,$$

por lo tanto la discontinuidad en $x = -2$ es esencial infinita y la recta $x = -2$ es asíntota vertical;

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{3(x+1)}{x+2} = \frac{3 \times 1}{0+2} = \frac{3}{2}\,,$$

por lo que la discontinuidad en $x = 0$ es removible;

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{3(x+1)}{x+2} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{9}{5}\,,$$

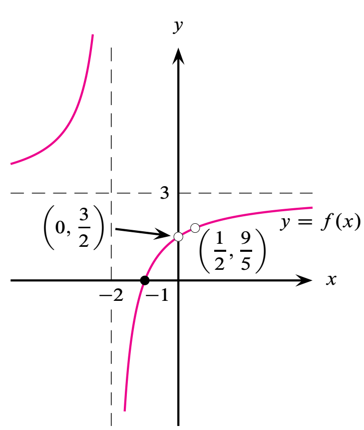
por lo cual la discontinuidad en $x = \frac{1}{2}$ también es removible.

c. Ya vimos que la única asíntota vertical es la recta $x = -2$.
Para hallar las asíntotas horizontales calculemos

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x^3 + 3x^2 - 3x}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{6}{2} = 3\,.$$

Inferimos de aquí que $y = 3$ es la única asíntota horizontal.

d. La gráfica de la función f es:



□

28. Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2}$.

   a. Proporcione dominio, raíces e intervalos de continuidad de la función f.
   b. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales de la función f.
   c. Dibuje la gráfica y halle la imagen de la función f.

▼

   a. Por ser una función racional, su dominio es:

$$D_f = \mathbb{R} - \{x \mid 9 - x^2 = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 = 9\} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}.$$

Raíces: para $x \in D_f$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ o bien } x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ o bien } x = 3.$$

Pero $x = 3 \notin D_f$, por lo cual sólo hay una raíz que es $x = -1$.
Intervalos de continuidad:
Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio

$$D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty).$$

   b. Esta función tiene dos discontinuidades: en $x = -3$ y en $x = 3$.
Si $x - 3 \neq 0$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+1)(x-3)}{(3-x)(3+x)} =$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{-(3+x)} = \frac{3+1}{-(3+3)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Entonces la función $f(x)$ tiene en $x = 3$ una discontinuidad removible.
Por otro lado:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x+1}{-(3+x)} = \lim_{x\to -3} \frac{-(x+1)}{3+x} = \text{“}\left(\frac{2}{0}\right)\text{”} = \infty.$$

Ya que $(3 + x) \to 0$ y que $-(x + 1) \to 2$ cuando $x \to -3$.
Aún más,

- Cuando $x < -3$ & x próximo a -3:

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{-x-1}{3+x} = -\infty. \text{ Ya que } -x-1 > 0 \text{ y que } 3 + x < 0.$$

- Cuando $x > -3$ & x próximo a -3:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{-x-1}{3+x} = +\infty. \text{ Ya que } -x-1 > 0 \text{ y que } 3 + x > 0.$$

La recta $x = -3$ es una asíntota vertical.
Ahora bien,

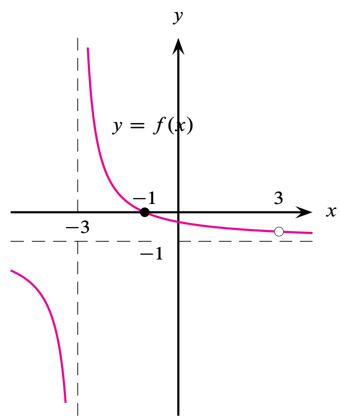
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x-1}{x+3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Así también,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1.$$

Entonces la recta $y = -1$ es la asíntota horizontal.

c. Un bosquejo de la gráfica de la función f es:



Rango: $R_f = \mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{2}{3}\right\}$.

(Es preciso observar que $\frac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2} \neq -1$, pues $x^2 - 2x - 3 = -(9 - x^2) \Leftrightarrow -2x - 3 = -9 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$ pero $3 \notin D_f$.)

□

29. Sea la función $h(x) = \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 25}$.

a. Obtener el dominio, raíces e intervalos de continuidad.
b. Hallar las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
c. Bosquejar la gráfica de la función h.

▼

a. Por ser una función racional, su dominio es

$$D_h = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 - 25 = 0\} = \mathbb{R} - \{x \mid x^2 = 25\} = \mathbb{R} - \{-5, 5\}.$$

Raíces: para $x \in D_h \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$, que son sus dos raíces.
Por ser una función racional es continua en todo su dominio; es decir, en

$$(-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, \infty).$$

b. La función es discontinua en $x = -5$ y en $x = 5$.

$$\lim_{x \to -5^-} h(x) = \lim_{x \to -5^-} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 25} = \lim_{x \to -5^-} \frac{2x^2 - 18}{(x + 5)(x - 5)} = +\infty,$$

ya que $(x^2 - 25) \to 0$ con valores positivos y ya que $(2x^2 - 18) \to 32$, que es positivo, cuando $x \to -5^-$.
Análogamente:

$$\lim_{x \to -5^+} h(x) = \lim_{x \to -5^+} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 25} = \lim_{x \to -5^+} \frac{2x^2 - 18}{(x + 5)(x - 5)} = -\infty,$$

ya que $(x^2 - 25) \to 0$ con valores negativos y ya que $(2x^2 - 18) \to 32$, que es positivo, cuando $x \to -5^+$.

De lo anterior podemos afirmar que la recta $x = -5$ es una asíntota vertical.
De manera semejante se obtiene que la recta $x = 5$ es una asíntota vertical y además que

$$\lim_{x \to 5^-} h(x) = -\infty \ \& \ \lim_{x \to 5^+} h(x) = +\infty\,.$$

También se pueden obtener estos resultados considerando que la función es par.
En cuanto a las asíntotas horizontales vemos que

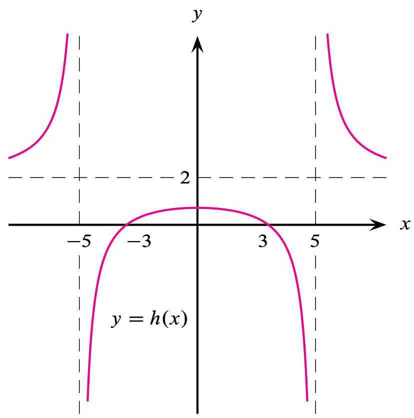
$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 25} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \dfrac{18}{x^2}}{1 - \dfrac{25}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

y que

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 18}{x^2 - 25} = 2\,,$$

lo cual nos permite afirmar que la recta $y = 2$ es la única asíntota horizontal de la función.

c. Un bosquejo de la gráfica de h puede ser así:



□

30. De la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 7x + 10}$, encontrar:

a. Dominio, raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación.
b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
c. El bosquejo de su gráfica.

▼

a. Dominio: vemos que

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x+6)(x-2)}{(x-5)(x-2)} = \frac{x+6}{x-5} \quad \text{si } x \neq 2.$$

Así:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\,5, 2\,\}\,.$$

La raíz es: $x = -6$.
Discontinuidades:
En $x = 2$ se tiene una discontinuidad removible, & $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\dfrac{8}{3}$.
En $x = 5$ se tiene una discontinuidad esencial infinita, ya que $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \infty$.

b. Puesto que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\dfrac{6}{x}}{1-\dfrac{5}{x}} = 1,$$

entonces $y = 1$ es asíntota horizontal.
Se tiene que $x = 5$ es una asíntota vertical. Para esto vamos a examinar los límites laterales:

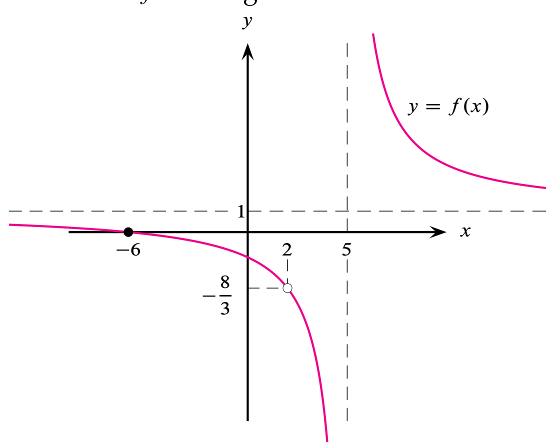
i. Si $x \to 5^- \;\Rightarrow\; x < 5 \;\Rightarrow\; x - 5 < 0 \;\Rightarrow\; (x-5) \to 0^-$, entonces:

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} \frac{x+6}{x-5} = \text{``}\left(\frac{11}{0^-}\right)\text{''} = -\infty\,.$$

ii. Si $x \to 5^+ \;\Rightarrow\; x > 5 \;\Rightarrow\; x - 5 > 0 \;\Rightarrow\; (x-5) \to 0^+$, entonces:

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} \frac{x+6}{x-5} = \text{``}\left(\frac{11}{0^+}\right)\text{''} = +\infty\,.$$

c. Un esbozo de la gráfica de la función f es el siguiente:



□

31. De la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$, encontrar:

a. Dominio, raíces, puntos de discontinuidad y su clasificación.
b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
c. El bosquejo de su gráfica.

▼

a. Tenemos

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \frac{x-3}{x+1}, \quad \text{si } x \neq -2.$$

Por lo tanto podemos indicar ahora:
Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$.
Raíz: $x = 3$.
Discontinuidades: en $x = -2$ existe una discontinuidad removible, ya que

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{x-3}{x+1} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

En $x = -1$ existe una discontinuidad esencial infinita, ya que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \text{``}\left(\dfrac{-4}{0}\right)\text{''} = \infty$.

b. Como

$$f(x) = \frac{1 - \dfrac{3}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}}\,, \text{ para } x \neq 0,$$

entonces,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \dfrac{3}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Encontramos que $y = 1$ es asíntota horizontal.
Calculamos los límites laterales en $x = -1$.

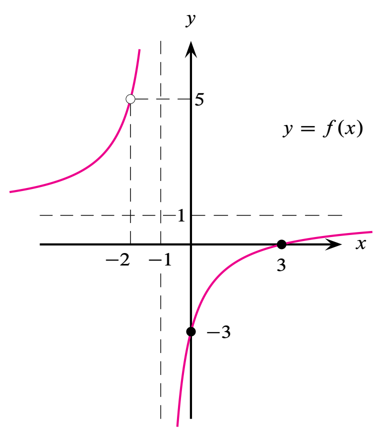
i. Si $x \to -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow (x + 1) \to 0^-$, obtenemos

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x - 3}{x + 1} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^-}\right)\text{”} = +\infty\,.$$

ii. Si $x \to -1^+ \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow (x + 1) \to 0^+$, obtenemos

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x - 3}{x + 1} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^+}\right)\text{”} = -\infty\,.$$

c. La gráfica de la función $f(x)$ es:



□

32. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}$, determinar:

a. Dominio, raíces e intervalos de continuidad.
b. Discontinuidades y su clasificación.
c. Asíntotas verticales y horizontales.
d. Un esbozo de la gráfica.

▼

a. Dominio:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 - x - 2 = 0 \,\right\},$$

pero

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1 \text{ o bien } x = 2;$$

luego:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}.$$

Para calcular las raíces, vemos que:

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ o bien } x = -3\,,$$

pero como $-1 \notin D_f$, entonces $x = -3$ es la única raíz de $f(x)$.
La función f es continua en su dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$.

b. Ahora:

$$f(x) = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{x + 3}{x - 2}, \text{ en su dominio;}$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x + 3}{x - 2} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}\,;$$

luego, en $x = -1$ la función tiene una discontinuidad removible, ya que si definiésemos $f(-1) = -\frac{2}{3}$, la función f resultaría continua en -1.
Vemos también que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x + 3}{x - 2} = -\infty \;\&\; \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x + 3}{x - 2} = +\infty,$$

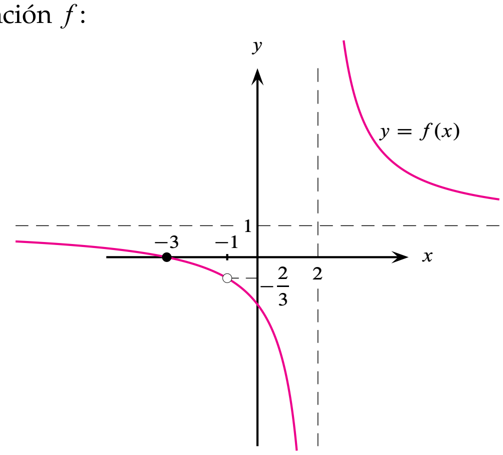
por lo que en $x = 2$ la función tiene una discontinuidad infinita.

c. Por lo anterior inferimos que $x = 2$ es la única asíntota vertical de la función. Para obtener las horizontales calculemos

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 3}{x - 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1;$$

obtenemos que $y = 1$ es asíntota horizontal.

d. Ésta es la gráfica de la función f:



□

33. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$, determine:

a. Dominio, raíces y paridad.

b. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.

c. Discontinuidades y su clasificación.
d. Esbozo gráfico y rango.

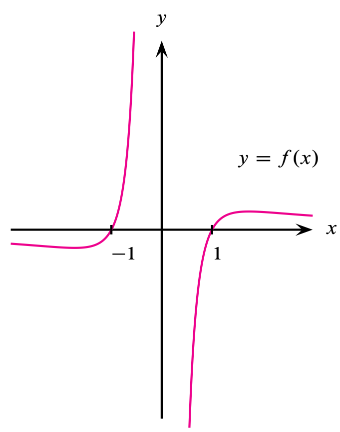
▼

a. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
Raíces: $x = \pm 1$, que son las raíces de $x^2 - 1 = 0$.
Es impar pues
$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^3} = \frac{x^2 - 1}{-x^3} = -\frac{x^2 - 1}{x^3} = -f(x).$$

b. $x = 0$ es asíntota vertical pues
$$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty;$$
$y = 0$ es asíntota horizontal pues
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

c. Se trata de una función racional y por lo tanto es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x = 0$ la discontinuidad es infinita por lo visto en lo anterior.

d. Ésta es la gráfica de la función f:



Su rango es todo $\mathbb{R}$.

□

34. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$, determine:

a. Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
b. Las ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
c. Un esbozo de la gráfica.

▼

a. Como es una función racional, los puntos de discontinuidad son las raíces del denominador
$$x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\&\; x = 2.$$
Como
$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2 \;\&\; x = -1,$$

$x = 2$ es un punto de discontinuidad removible; lo vemos en:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)x} = \frac{x+1}{x} \text{ si } x \neq 2;$$

y en:

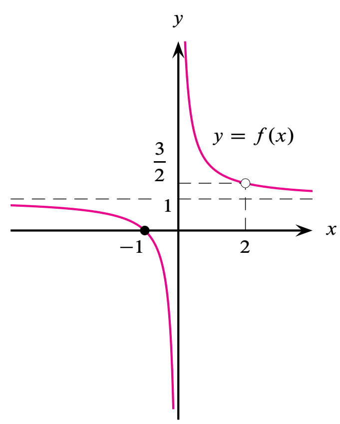
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{3}{2}.$$

Por lo que si definiésemos $f(2) = \frac{3}{2}$, la función f resultaría continua en $x = 2$.

En $x = 0$ hay una discontinuidad esencial infinita, pues $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

b. Según lo que acabamos de calcular, $x = 0$ es asíntota vertical.
Para hallar las asíntotas horizontales, calculamos
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1 + 0 = 1$; por lo que $y = 1$ es la asíntota horizontal.

c. Vemos que $x = -1$ es la única raíz de $f(x)$, esto es, que $f(-1) = 0$. La gráfica de la función f es:



□

35. Dada $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$.

a. Determinar su dominio y sus raíces.
b. Clasifique sus puntos de discontinuidad.
c. Encuentre las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.
d. Haga un bosquejo de su gráfica.

▼

a. Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 + x - 2 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+2)(x-1) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \{-2, 1\}.$$

Raíces:

$$2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1; \\ -\dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Luego, la única raíz es $x = -\frac{3}{2}$, pues en $x = 1$ la función no está definida.

b. En $x = -2$ hay una discontinuidad esencial infinita, pues

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x + 3}{x + 2} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^-}\right)\text{”} = +\infty .$$

También

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{2x + 3}{x + 2} = \text{“}\left(\frac{-1}{0^+}\right)\text{”} = -\infty .$$

En cambio en $x = 1$ la discontinuidad es removible ya que si definiésemos $f(1)$ como

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x + 3}{x + 2} = \frac{5}{3}$$

la función f resultaría continua en $x = 1$.

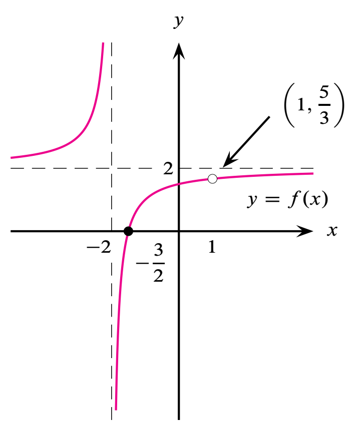
c. De lo visto en (b) se desprende que la recta $x = -2$ es la asíntota vertical y como

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x + 3}{x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = \frac{2}{1} = 2,$$

obtenemos que $y = 2$ es la asíntota horizontal.

d. Podemos tabular $f(0) = \dfrac{2 \times 0^2 + 0 - 3}{0^2 + 0 - 2} = \dfrac{2 \times 0 - 3}{0 - 2} = \dfrac{0 - 3}{0 - 2} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$.

La gráfica de la función f es:



□

36. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4 - x^2}$, obtener:

a. Dominio y puntos de intersección con el eje x.
b. Intervalos de continuidad.
c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
d. Bosquejo gráfico.

▼

a. Como se trata de una función racional, su dominio es todo $\mathbb{R}$ excepto las raíces del denominador, es decir, los x tales que

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2 .$$

Por lo que el dominio de f es: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.

La gráfica de la función interseca al eje x cuando $f(x) = 0$, esto es, cuando

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 .$$

b. En $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ la función f es continua debido a que es una función racional.

c. Observamos que

$$\lim_{x \to -2^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{x^2 - 1}{(2 + x)(2 - x)} = \mp\infty .$$

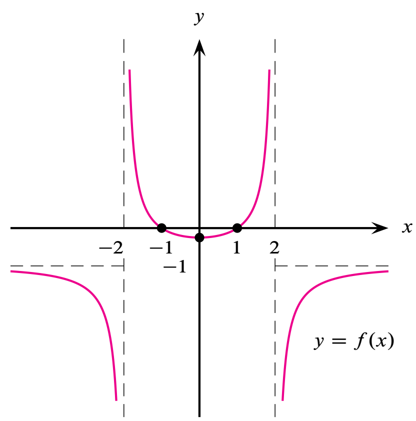
Por lo que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical; pero, como la función es par, la recta $x = 2$ también es asíntota vertical. Ahora vemos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4}{x^2} - 1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1 .$$

Por lo que la recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

d. Tabulamos $f(0) = -\dfrac{1}{4}$.

La gráfica de la función f es:



□

37. Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^3 - 3x}{x^4 + x^3}$.

Hallar el dominio y las raíces, clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales y hacer un bosquejo de la gráfica.

▼ Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^4 + x^3 = x^3(x + 1) \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq 0 \;\&\; x \neq -1 \right\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{0, -1\};$$

Raíces:

$$3x^3 - 3x = 3x(x^2 - 1) = 3x(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1 \;\&\; x = 1.$$

Ésas son las raíces del numerador, pero como $0 \notin D_f$ & $-1 \notin D_f$, la única raíz de f es $x = 1$.

Discontinuidades:

La función f es continua en su dominio, pues es una función racional.

En $x = -1$ la discontinuidad es removible, pues:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{3x(x-1)(x+1)}{x^3(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{3(x-1)}{x^2} = \frac{3(-2)}{(-1)^2} = -6;$$

por lo que, si definiésemos $f(-1) = -6$, entonces f resultaría continua en $x = -1$.

En $x = 0$ la discontinuidad es esencial infinita, pues:

$$\lim_{x \to 0^\mp} f(x) = \lim_{x \to 0^\mp} \frac{3x(x-1)(x+1)}{x^3(x+1)} = \lim_{x \to 0^\mp} \frac{3(x-1)}{x^2} = -\infty;$$

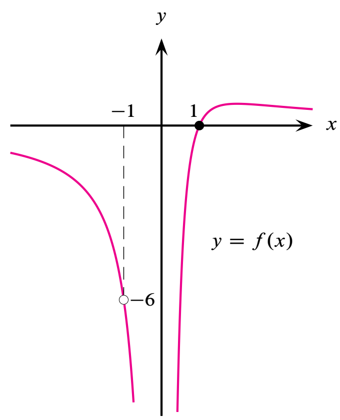
Asíntotas:

Se ve que $x = 0$ es una asíntota vertical y además

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^3 - 3x}{x^4 + x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{3}{x} - \dfrac{3}{x^3}}{1 + \dfrac{1}{x}} = \frac{0-0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal.

Un bosquejo de la gráfica de f es:



□

38. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3}$, determine:

a. Dominio y raíces.
b. Intervalos de continuidad. Puntos de discontinuidad y su clasificación.
c. Asíntotas verticales y horizontales.
d. Esbozo gráfico y rango.

▼

a. Por ser f una función racional su dominio es

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x^2 + 4x + 3 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \mid (x+3)(x+1) = 0 \right\};$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{-3, -1\}.$$

Para que $f(x) = 0$, es necesario que $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ o bien que $x = 2$.

Es decir, $f(x)$ sería 0 en $x = -3$ y en $x = 2$, pero $x = -3$ no está en el dominio de f; por lo tanto f tiene solamente una raíz que es $x = 2$.

b. Discontinuidad:
Por ser f una función racional es continua en todo su dominio:

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3, -1\}.$$

Es decir, f es continua en los intervalos

$$(-\infty, -3),\ (-3, -1) \text{ y } (-1, +\infty).$$

Esta función tiene discontinuidades en $x = -3$ y en $x = -1$.

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-2}{x+1} = $$
$$= \frac{-3-2}{-3+1} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \text{ tiene en } x = -3 \text{ una discontinuidad removible;}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x+1} = \text{“}\left(\frac{-3}{0}\right)\text{”} = \infty.$$

Por lo cual $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe. Esto es, f tiene en $x = -1$ una discontinuidad esencial infinita.

c. Asíntotas verticales:

i. Cuando $x \to -1^-$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty;$$

ya que $(x-2) \to -3 < 0$ & $(x+1) \to 0$ con $x+1 < 0$.

ii. Cuando $x \to -1^+$:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty;$$

ya que $(x-2) \to -3 < 0$ & $(x+1) \to 0$ con $x+1 > 0$.

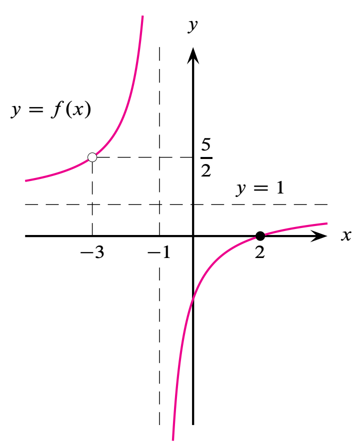
Luego, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical y además es la única.
Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

También $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

Por lo tanto la recta $y = 1$ es la única asíntota horizontal de f.

d. La gráfica de f es:



El rango de la función es:

$$R_f = (-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right);$$
$$R_f = \mathbb{R} - \left\{1, \frac{5}{2}\right\}.$$

Observe que $\frac{5}{2} \notin R_f$, pues

$$f(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 5x^2 + 20x + 15 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 18x + 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -3,$$

pero $x = -3 \notin D_f$.

Análogamente $1 \notin R_f$, pues $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 4x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow$ $3x + 9 = 3(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$, pero $-3 \notin D_f$.

□

39. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4}$, determine:

a. Dominio y raíces.
b. Puntos de discontinuidad y su clasificación.
c. Asíntotas verticales y horizontales.
d. Esbozo gráfico de f.

▼

a. Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 4 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2 \right\};$$
$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}.$$

Las raíces de f son

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ o bien } x = 1,$$

pero $x = -2 \notin D_f$, por lo que cual f tiene sólo una raíz que es $x = 1$.

b. Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Tiene discontinuidades en $x = -2$ y en $x = 2$.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{2(x + 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} =$$
$$= \lim_{x \to -2} \frac{2(x - 1)}{(x - 2)} = \frac{2(-2 - 1)}{-2 - 2} = \frac{2(-3)}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2};$$

entonces f tiene en $x = -2$ una discontinuidad removible o evitable.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2(x - 1)}{x - 2} = \text{no existe},$$

ya que $\displaystyle\lim_{x\to 2}[2(x-1)] = 2$ & $\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$, entonces $\dfrac{2(x-1)}{x-2} \to$ " $\left(\dfrac{2}{0}\right)$ ", por lo que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty \text{ o bien } -\infty.$$

Tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial infinita.

c. Para las asíntotas verticales pensamos en la recta $x = 2$. Para corroborarlo calculamos los límites laterales $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x)$ & $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

i. Si $x \to 2^-$, entonces $x < 2$ & $x - 2 < 0$.
Como $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} 2(x-1) = 2 > 0$ & $\displaystyle\lim_{x\to 2^-}(x-2) = 0^-$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2(x-1)}{x-2} = -\infty.$$

ii. Si $x \to 2^+$, entonces $x > 2$ & $x - 2 > 0$.
Como $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} 2(x-1) = 2 > 0$ & $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0^+$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2(x-1)}{x-2} = +\infty.$$

Por lo tanto la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de f y además es la única.

Para las asíntotas horizontales calculamos los límites en el infinito.

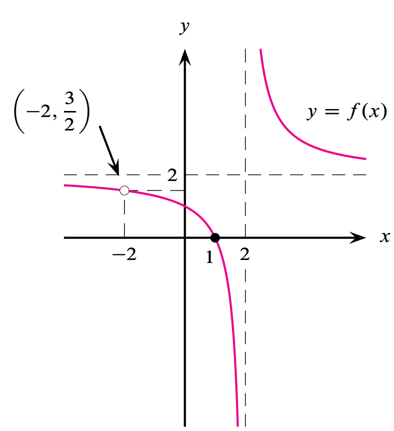
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x-2}{x-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

También $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de f y además es la única.

d. Un bosquejo de la gráfica es



□

40. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6}$, determinar:

Dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; dibujar la gráfica.

▼ Dominio:

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R} \} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6} \in \mathbb{R} \right\} =$$
$$= \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x + 6 \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{ x \mid x^2 + 5x + 6 = 0 \}.$$

Pero como

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ o bien } x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -3 \text{ o bien } x = -2,$$

entonces $D_f = \mathbb{R} - \{-3, -2\}$.

Raíces:

Para que $f(x) = 0$, es necesario

$$2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ o bien } x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -3.$$

Aparentemente $x = 0$ & $x = -3$ son raíces de f, pero debido a que $x = -3 \notin D_f$, entonces f tiene sólo una raíz que es $x = 0$.

Intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades.

Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-3, -2\}$.

Es decir, f es continua en el conjunto $(-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Entonces f tiene discontinuidades en $x = -3$ y en $x = -2$.

Veamos qué tipo de discontinuidades son:

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6} = \lim_{x \to -3} \frac{2x(x+3)}{(x+3)(x+2)} =$$
$$= \lim_{x \to -3} \frac{2x}{x+2} = \frac{2(-3)}{-3+2} = \frac{-6}{-1} = 6.$$

Entonces $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 6$, por lo cual la discontinuidad que f tiene en $x = -3$ es removible o evitable.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{2x}{x+2} = \text{“}\left(\frac{-4}{0}\right)\text{”} = \infty .$$

Entonces $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ no existe por lo que la discontinuidad es esencial y además infinita.

Asíntotas verticales y horizontales.

Una posible asíntota vertical es la recta $x = -2$, por lo cual precisaremos los límites laterales $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2x}{x+2} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^-}\right)\text{”}.$$

Si $x \to -2^-$, entonces $\begin{cases} x < -2 & \Rightarrow x + 2 < 0; \\ 2x \to -4 & \Rightarrow 2x < 0; \end{cases}$

por lo que $\dfrac{2x}{x+2} > 0$ y, por lo mismo, $\dfrac{2x}{x+2} \to +\infty$; luego:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{2x}{x+2} = \text{“}\left(\frac{-4}{0^+}\right)\text{”}.$$

Si $x \to -2^+$, entonces $\begin{cases} x > -2 & \Rightarrow\ x+2>0; \\ 2x \to -4 & \Rightarrow\ 2x < 0. \end{cases}$

Por lo que $\dfrac{2x}{x+2} < 0$ y, por lo mismo, $\dfrac{2x}{x+2} \to -\infty$, entonces, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$.

Con lo cual podemos afirmar que la recta $x = -2$ es la úniva asíntota vertical.

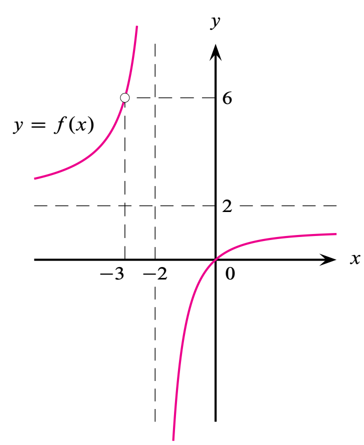
Para determinar las asíntotas horizontales, calculamos $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ & $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x(2)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1+\dfrac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Por lo tanto la recta $y = 2$ es la única asíntota horizontal, ya que de igual manera se puede verificar que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

Un esbozo de la gráfica de f:



□

41. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:

a. Dominio, raíces y paridad.
b. Clasificación de discontinuidades.
c. Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
d. Esbozo gráfico y rango de f.

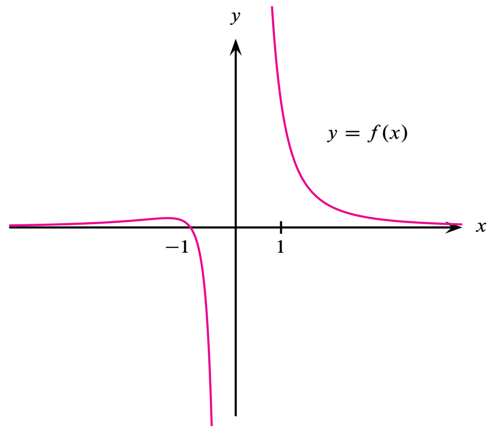
▼

a. Dominio.
Por ser f una función racional, su dominio es
$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x^3 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$
Raíces:
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$
Paridad:
$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3};$$
$$-f(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$
Luego, $f(-x) \neq f(x)$, pues si igualamos
$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$
y multiplicamos por x^3, $x \neq 0$;
$$x - 1 = -x - 1 \Rightarrow x = 0 \text{ lo cual es absurdo.}$$
También directamente pues, por ejemplo, $f(-1) = 0$ & $f(1) = 2$.
Por lo tanto f no es par ni tampoco es impar.

b. Por ser una función racional f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Esto es, f es continua en el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Entonces f tiene una discontinuidad en $x = 0$.
Como $\lim\limits_{x\to 0}(x + 1) = 1$ & $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x^3} = \infty$. Es decir la discontinuidad es esencial; puede decirse también que la discontinuidad es infinita.

c. Precisamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ determinando los límites laterales:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”} = -\infty.$$
Puesto que $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $(x + 1) \to 1 > 0$.
Como $x^3 < 0$ & $(x + 1) > 0$, entonces $\dfrac{x+1}{x^3} < 0$, por lo que $\dfrac{x+1}{x^3} \to -\infty$.
Por otro lado:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”} = +\infty.$$
Puesto que $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ & $(x + 1) \to 1 > 0$.
Como $x^3 > 0$ y $(x + 1) > 0$, entonces $\dfrac{x+1}{x^3} > 0$, por lo que $\dfrac{x+1}{x^3} \to +\infty$.
De lo anterior se desprende que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical y que además es la única.
Ahora bien,
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0.$$
La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal y además es la única pues
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{x^3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \times x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x^2} = \text{“}\left(\frac{1}{+\infty}\right)\text{”} = 0.$$

d. La gráfica de la función f es:



El rango de f es todo $\mathbb{R}$.

□

42. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$, determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; esbozar su gráfica.

▼ Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+2)(x-2) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \{ \pm 2 \}.$$

Raíces:

Para hallar las raíces se resuelve $x^2 + 2x - 8 = 0$; como $x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$, se ve que $x^2 + 2x - 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \;\&\; x = -4$; pero como $2 \notin D_f$, la única raíz de f es $x = -4$.

Continuidad:

La función por ser racional es continua en su dominio, es decir, en $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

Calculamos

$$\lim_{x \to -2^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{(x+4)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{x+4}{x+2} = \mp\infty.$$

Pues $\lim\limits_{x \to -2} (x+4) = 2 > 0 \;\&\; \lim\limits_{x \to -2^{\mp}} (x+2) = 0\mp$.

Asíntotas:

Analizando el límite anterior, la discontinuidad en $x = -2$ es esencial infinita, y entonces la recta $x = -2$ es asíntota vertical.

Análogamente

$$\lim_{x \to 2^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

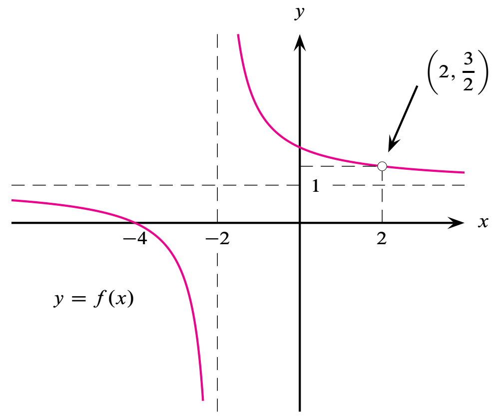
por lo que la discontinuidad en $x = 2$ es removible, pues, si se definiese $f(2) = \dfrac{3}{2}$, entonces $f(x)$ resultaría continua en $x = 2$.

Y ahora:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{x^2}}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por lo tanto la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

La gráfica de la función f es:



□

43. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^3 - x^2}$. Encontrar el dominio y las raíces; clasificar sus discontinuidades, encontrar sus asíntotas verticales y horizontales; además hacer un bosquejo de la gráfica.

▼ Dominio: por ser f una función racional su dominio es:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^3 - x^2 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x^2(x-1) = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{ 0, 1 \}.$$

Raíces:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 + 3x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x+3) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ así como también } x = -3.$$

Pero como $x = 0 \notin D_f$, entonces sólo $x = -3$ es raíz.

Discontinuidades:

Por ser f una función racional es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$, por lo que f es discontinua en $x = 0$ y en $x = 1$.

Para averiguar los tipos de discontinuidades calculamos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2}{x^3 - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(x+3)}{x^2(x-1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x-1} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Por lo cual f tiene en $x = 0$ una discontinuidad removible o evitable.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{x-1} = \text{“}\left(\frac{4}{0}\right)\text{”} \text{ no existe.}$$

a. Cuando $x \to 1^-$, sucede que $(x+3) \to 4 > 0$ y que $(x-1) \to 0$ con valores negativos; por lo tanto $\dfrac{x+3}{x-1} = \text{“}\left(\dfrac{4}{0^-}\right)\text{”} = -\infty$; entonces $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

b. Cuando $x \to 1^+$, sucede que $(x+3) \to 4$ y que $(x-1) \to 0$ con valores positivos; por lo tanto $\dfrac{x+3}{x-1} = \text{“}\left(\dfrac{4}{0^+}\right)\text{”} = +\infty$; entonces $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

Por lo cual f tiene en $x = 1$ una discontinuidad esencial, más aún, una discontinuidad infinita.

Asíntotas:

Asíntotas verticales

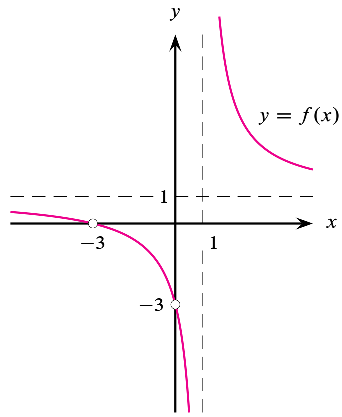
Debido a que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y a que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, se puede afirmar que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función f. Además es la única.

Asíntotas horizontales

Vemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x^2}{x^3-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3(1+\frac{3}{x})}{x^3(1-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Entonces la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal y es la única, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

El bosquejo de la gráfica de la función f es el siguiente:



□

44. Para la función $f(x) = \dfrac{4x^2-8x}{x^2-4}$, realice lo siguiente:

a. Determine su dominio y raíces.
b. Mencione sus tipos de discontinuidad.
c. Encuentre las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.
d. Haga un esbozo de la gráfica de f.

▼

a. Dominio:

$$D_f = \mathbb{R} - \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0 \,\}.$$

Pero $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow |\,x\,| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.
Por lo que $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$.
Raíces:
Para hallar las raíces se considera cuando $f(x) = 0$, esto es, cuando

$$4x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ y cuando } x = 2.$$

Pero como $2 \notin D_f$, entonces la única raíz es $x = 0$.

b. Se sabe que

$$f(x) = \frac{4x^2-8x}{x^2-4} = \frac{4x(x-2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Se calcula

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{4x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{4x}{x+2} = \frac{8}{4} = 2.$$

Por lo que en $x = 2$, la función tiene una discontinuidad removible, ya que, si se definiese $f(2) = 2$, la función resultaría continua.

Por el contrario como

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{4x^2 - 8x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{4x(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \mp\infty,$$

pues

$$\lim_{x\to -2}[4x(x-2)] = 32 \text{ y } \lim_{x\to -2^{\pm}}[(x+2)(x-2)] = 0^{\mp},$$

ya que

$$\lim_{x\to -2}(x-2) = -4 \text{ y } \lim_{x\to -2^{\pm}}(x+2) = 0^{\pm}.$$

La discontinuidad en $x = -2$ es esencial infinita.

c. Por los resultados obtenidos en el inciso anterior [$\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \mp\infty$], se concluye que la recta $x = -2$ es asíntota vertical.

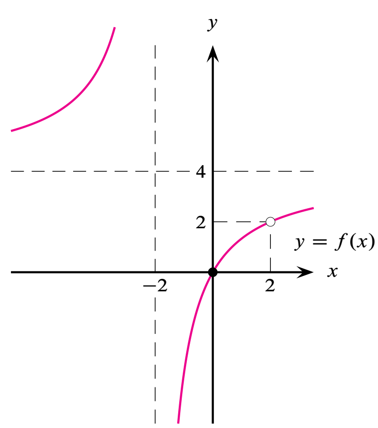
Para hallar las asíntotas horizontales se determina

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2 - 8x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(4 - \frac{8}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4 - \frac{8}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{4-0}{1-0} = \frac{4}{1} = 4.$$

Entonces la recta $y = 4$ es asíntota horizontal (la única).

d. La gráfica de la función f es:



□

45. Para la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$, obtener: dominio, raíces y paridad; intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación; asíntotas verticales y horizontales.

▼ Dominio:

Por ser $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$ una función racional, su dominio es

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x^2 - 1 = 0 \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x^2 = 1 \right\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$$

Raíces:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Paridad:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - 1} = f(x) \;\Rightarrow\; f \text{ es una función par.}$$

Intervalos de continuidad, discontinuidades y su clasificación:

Por ser f una función racional, es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Es decir, f es continua en el conjunto $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Esta función tiene dos discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 1$.

Para decidir qué tipo de discontinuidades son vemos si existen o no $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

En ambos casos notamos que el denominador $(x^2 - 1) \to 0$ y que el numerador $2x^2 \to 2$, por lo cual

$$\frac{2x^2}{x^2 - 1} \to \text{“}\left(\frac{2}{0}\right)\text{”}$$

Es decir, $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ & $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existen, entonces las discontinuidades son esenciales, más aún, infinitas.

Asíntotas verticales:

De lo anterior podemos decir que las rectas $x = -1$ & $x = 1$ son asíntotas verticales.

Determinaremos los límites laterales:

Si $x \to 1^-$, entonces $0 < x < 1 \;\Rightarrow\; x^2 < 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 < 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{2x^2}{x^2 - 1} < 0$, por lo cual $\dfrac{2x^2}{x^2 - 1} \to -\infty$; es decir, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Si $x \to 1^+$, entonces $x > 1 \;\Rightarrow\; x^2 > 1 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 > 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{2x^2}{x^2 - 1} > 0$, por lo cual $\dfrac{2x^2}{x^2 - 1} \to +\infty$; es decir, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

Aún más, por la simetría de la gráfica de f con respecto al eje de las ordenadas (f es par), se puede asegurar que

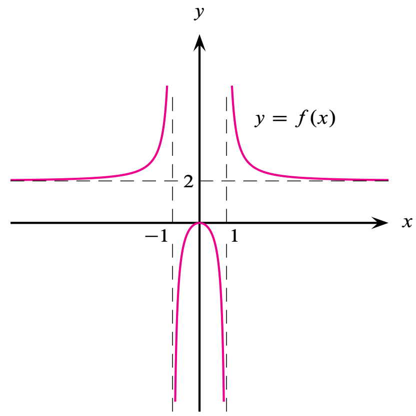
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty;$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty.$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Esto implica que la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal. Además es la única, ya que por la paridad de f se tiene que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

La gráfica de la función f es:



□

46. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{2x^2 + x - 3}$, obtenga:

Dominio y raíces; intervalos de continuidad y puntos de discontinuidad (clasificados); asíntotas verticales y horizontales.

▼ Dominio: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 + x - 3 \neq 0 \right\}$.

Pero, $2x^2 + x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{4} = \dfrac{-1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

entonces $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{3}{2}, 1 \right\}$.

Para hallar las raíces resolvamos:

$$2x^2 + 7x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ -2; \end{cases}$$

Las raíces serían $x = -\dfrac{3}{2}$ y también $x = -2$; pero como $-\dfrac{3}{2} \notin D_f$, entonces la única raíz es $x = -2$.

La función es continua en su dominio: $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$; es discontinua en $x = -\dfrac{3}{2}$ y en $x = 1$. Ahora como

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x+2)}{2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)} = \lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{x+2}{x-1} = \frac{-\frac{3}{2} + 2}{-\frac{3}{2} - 1} = \frac{\frac{-3+4}{2}}{\frac{-3-2}{2}} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5},$$

en $x = -\dfrac{3}{2}$ la discontinuidad no es esencial, es removible, a diferencia de lo que ocurre en $x = 1$, pues ahí:

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x+2}{x-1} = \pm\infty;$$

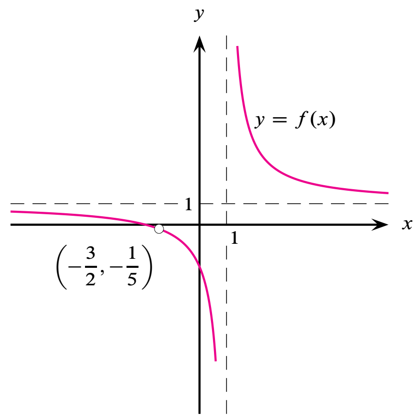
Por lo que la discontinuidad en $x = 1$ es esencial infinita, y la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

Para determinar las asíntotas horizontales calculamos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Entonces la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

La gráfica de la función f es:



□

47. Hallar dónde es continua la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2\sqrt{x} + 3x - 2x\sqrt{x} - 3}{x - 1} & \text{si } x \neq 1, x \geq 0; \\ 5 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

▼ En el único punto $x \geq 0$ donde hay duda es en $x = 1$; luego, calculamos $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ y observamos que

$$h(x) = \frac{2x^2\sqrt{x} + 3x - 2x\sqrt{x} - 3}{x - 1} = \frac{2x\sqrt{x}(x - 1) + 3(x - 1)}{x - 1} = \frac{(x - 1)(2x\sqrt{x} + 3)}{x - 1}.$$

Si $x \neq 1 \Rightarrow x - 1 \neq 0$, entonces por lo anterior

$$h(x) = 2x\sqrt{x} + 3.$$

Por lo que

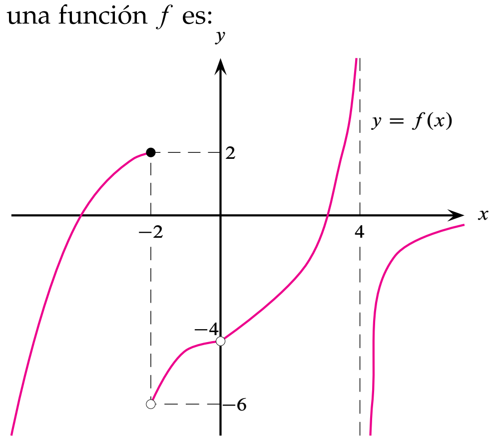
$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1}(2x\sqrt{x} + 3) = 2 \times 1\sqrt{1} + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5.$$

Comprobamos que la función h resulta continua en $x = 1$, pues $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = h(1)$.

También comprobamos que h resulta continua en todo su dominio que es el intervalo $[0, +\infty)$.

□

48. Si la representación gráfica de una función f es:



a. Hallar su dominio.

b. Encontrar además los siguientes límites:

i. $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

ii. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$;

iii. $\lim_{x \to a^-} f(x)$;

iv. $\lim_{x \to a^+} f(x)$;

v. $\lim_{x \to a} f(x)$.

Para $a = -2, 0, 4$.

c. Obtener las asíntotas horizontales y verticales, los intervalos de continuidad y la clasificación de las discontinuidades

▼

a. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$.

b. Límites:

i. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$;

ii. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;

iii. $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 2$;

iv. $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -6$;

v. $\lim_{x \to -2} f(x)$, no existe, pues los límites laterales son diferentes;

vi. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -4$;

vii. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -4$;

viii. $\lim_{x \to 0} f(x) = -4$, que es el límite lateral de f tanto por la izquierda como por la derecha;

ix. $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$;

x. $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$;

xi. $\lim_{x \to 4} f(x)$ no existe;

c. De aquí se sigue que la recta $y = 0$ (el eje de las x) es la única asíntota horizontal y que $x = 4$ es la única asíntota vertical.

La función $f(x)$ es continua en $(-\infty, -2]$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$ y en $(4, +\infty)$.

En $x = -2$ hay una discontinuidad (esencial) de salto, en $x = 0$ la discontinuidad es removible y en $x = 4$ la discontinuidad también es esencial pues es infinita. □

49. a. Dar una posible gráfica para una función f que sea continua en su dominio $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ y que satisfaga las condiciones:

i. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$;

ii. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

iii. $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1$;

iv. $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 3$;

v. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$;

vi. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$;

vii. $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$;

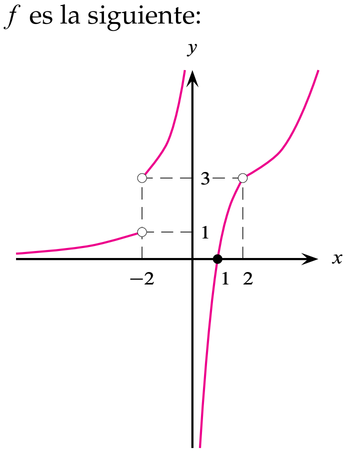
viii. $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$;

ix. $f(1) = 0$.

b. Clasifique sus discontinuidades.

▼

a. Una posible gráfica de la función f es la siguiente:



b. Discontinuidades:
En $x = -2$ se tiene una discontinuidad esencial de salto.
En $x = 0$ se tiene una discontinuidad esencial infinita.
En $x = 2$ se tiene una discontinuidad evitable o removible.

□

CAPÍTULO

5

La derivada

5.1 La recta tangente

Ejercicios 5.1.1

1. La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
2.99	769.605
2.995	795.755
2.999	816.801
3	822.08
3.001	827.366
3.005	848.58
3.009	869.907

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $P[3, h(3)]$.

▼ Sea S_1 una recta secante que pase por un punto $(x_1, h(x_1))$ con $x_1 < 3$.

Tomamos la otra secante S_2 que pase por un punto $(x_2, h(x_2))$ con $x_2 > 3$.

Consideramos que S_1 pasa por los puntos $(2.999, 816.801)$ y $(3, 822.08)$. La pendiente de S_1 es:

$$m_1 = \frac{822.08 - 816.801}{3 - 2.999} = \frac{5.279}{0.001} = 5\,279\,.$$

Consideramos que S_2 pasa por los puntos $(3.001, 827.366)$ y $(3, 822.08)$. La pendiente de S_2 es:

$$m_2 = \frac{827.366 - 822.08}{3.001 - 3} = \frac{5.286}{0.001} = 5\,286\,.$$

□

2. La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
-1.9	20.9701
-1.99	26.3638
-1.999	26.936
-2	27
-2.001	27.064
-2.01	27.6438
-2.1	33.7901

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $Q[-2, h(-2)]$.

▼ Consideramos una recta secante S_1 que pase por los puntos $(-2, h(-2))$ y $(x_1, h(x_1))$, y otra secante S_2 que pase por los puntos $(-2, h(-2))$ y $(x_2, h(x_2))$, donde $x_1 = 2.01$ & $x_2 = -1.99$.

La pendiente m_1 de la recta secante S_1 es

$$m_1 = \frac{h(x_1) - h(-2)}{x_1 - (-2)} = \frac{27.6438 - 27}{-2.01 + 2} = \frac{0.6438}{-0.01} = -64.38\,.$$

La pendiente m_2 de la recta secante S_2 es

$$m_2 = \frac{h(x_2) - h(-2)}{x_2 - (-2)} = \frac{26.3638 - 27}{-1.99 + 2} = \frac{-0.6362}{0.01} = -63.62\,.$$

□

3. La gráfica de la función

$$f(t) = -t^2 + 2t + 3$$

pasa por los puntos $[1.999, f(1.999)]$ y $[2.001, f(2.001)]$.

Obtenga el valor de la pendiente de las dos rectas secantes a la gráfica de f que pasan por el punto $(2, 3)$ y por los puntos dados.

▼ Efectivamente, $(2, 3) \in G_f$, pues $f(2) = -2^2 + 2(2) + 3 = 3$.

$$m_1 = \frac{3 - f(1.999)}{2 - 1.999} = \frac{3 - (-3.996001 + 3.998 + 3)}{0.001} = \frac{3 - (3.001999)}{0.001} = \frac{-0.001999}{0.001} = -1.999\,;$$
$$m_2 = \frac{3 - f(2.001)}{2 - 2.001} = \frac{3 - (-4.004001 + 4.002 + 3)}{-0.001} = \frac{3 - (2.997999)}{-0.001} = \frac{0.002001}{-0.001} = -2.001\,.$$

□

4. La recta tangente a la curva $y = x^3 + 2$ en el punto $P(-1, 1)$ tiene pendiente 3. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en el punto P.

▼ La función es $f(x) = x^3 + 2$.

$$P(x_0, f(x_0)) = P(-1, 1) \Rightarrow x_0 = -1 \;\&\; f(x_0) = 1.$$

La pendiente de la recta tangente t en P es $m_t = 3$.

La pendiente de la recta normal n es $m_n = \dfrac{-1}{m_t} = -\dfrac{1}{3}$.

La ecuación de la recta tangente t es:

$$y - f(x_0) = m_t(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 3(x + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 3x + 3 + 1 \Rightarrow y = 3x + 4, \text{ o bien } 3x - y + 4 = 0.$$

La ecuación de la recta normal n es:

$$y - f(x_0) = m_n(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \text{ o bien } x + 3y - 2 = 0.$$

□

5. La recta normal a la curva $y = \dfrac{2}{x}$ en el punto $Q(1, 2)$ tiene pendiente $\dfrac{1}{2}$. Determinar las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la curva en el punto Q.

▼ La función es $g(x) = \dfrac{2}{x}$.

$$Q(x_0, g(x_0)) = Q(1, 2) \Rightarrow x_0 = 1 \;\&\; g(x_0) = 2.$$

La pendiente de la recta normal n en Q es $m_n = \dfrac{1}{2}$.

La pendiente de la recta tangente t en Q es $m_t = \dfrac{-1}{m_n} = -2$.

La ecuación de la recta normal n es:

$$y - g(x_0) = m_n(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ o bien } x - 2y + 3 = 0.$$

La ecuación de la recta tangente t es:

$$y - g(x_0) = m_t(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -2x + 2 + 2 \Rightarrow y = -2x + 4 \text{ o bien } 2x + y - 4 = 0.$$

□

6. La recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ en el punto $R(1, -1)$ tiene pendiente cero. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto R.

▼ Por tener pendiente $m_t = 0$, la recta tangente t es una recta horizontal; y por pasar por el punto $R(1, -1)$, su ecuación es $y = -1$.

Por ser horizontal la recta tangente t, la recta normal n es vertical; y por pasar por el punto $R(1, -1)$, su ecuación es $x = 1$.

□

7. La recta normal a la curva $y = x^2 - 4x + 4$ en el punto P de abscisa 2 es vertical. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto P.

▼ Si $f(x) = x^2 - 4x + 4$ y si $x_0 = 2$, entonces la ordenada del punto P es $f(x_0) = (2)^2 - 4(2) + 4 = 0$, por lo cual $P(x_0, f(x_0)) = P(2, 0)$.

Por ser vertical la recta normal y por pasar por el punto $P(2, 0)$, su ecuación es $x = 2$.

Por ser vertical la recta normal n, la recta tangente t es horizontal (con pendiente 0); y por pasar por el punto $P(2, 0)$, su ecuación es $y = 0$. □

8. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 3 - x^2$ en el punto $P(-1, 2)$.

▼ La función es $f(x) = 3 - x^2$.

$$P(-1, 2) = P(x_0, f(x_0)) \Rightarrow x_0 = -1 \;\&\; f(x_0) = 2.$$

La pendiente de la recta tangente t a la curva en P es:

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3 - (h - 1)^2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3 - (h^2 - 2h + 1) - 2}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3 - h^2 + 2h - 1 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2 - h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2 - h) = 2; \\ m_t &= 2. \end{aligned}$$

La ecuación de la recta tangente t en P es:

$$\begin{aligned} &y - f(x_0) = m_t(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 2(x + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = 2x + 2 + 2 \Rightarrow y = 2x + 4 \text{ o bien } 2x - y + 4 = 0. \end{aligned}$$

La pendiente de la recta normal n es $m_n = \dfrac{-1}{m_t} = -\dfrac{1}{2}$.

La ecuación de la recta normal n en P es:

$$\begin{aligned} &y - f(x_0) = m_n(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ o bien } x + 2y - 3 = 0. \end{aligned}$$

□

9. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 3x^2 - 6x$ en el punto Q de abscisa 1.

▼ La función es $f(x) = 3x^2 - 6x$.

La abscisa del punto Q es $x_0 = 1$.

La ordenada de Q es $f(x_0) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$.

La pendiente de la recta tangente t a la curva en Q es:

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(1 + h)^2 - 6(1 + h) - (-3)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3 + 6h + 3h^2 - 6 - 6h + 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (3h) = 0; \\ m_t &= 0. \end{aligned}$$

La recta tangente t es una recta horizontal; y debido a que pasa por el punto $Q(1, -3)$, su ecuación es $y = -3$.

Además, la recta normal n a la curva en $Q(1, -3)$ es una recta vertical cuya ecuación es $x = 1$. □

5.2 La derivada de una función

Ejercicios 5.2.1

1. Sea $h(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$. Usando la definición de la derivada, calcular $h'(a)$.

   Calcular también, usando lo anterior, $h'(0)$ así como $h'(8)$.

   ▼ Calculamos el cociente diferencial:

$$
\begin{aligned}
\frac{h(x)-h(a)}{x-a} &= \frac{\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}} - \dfrac{3}{\sqrt{3a+2}}}{x-a} = \\
&= 3\frac{\dfrac{\sqrt{3a+2}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2}\sqrt{3a+2}}}{x-a} = \\
&= -3\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{3a+2}}{\sqrt{3x+2}\sqrt{3a+2}(x-a)} = \\
&= -3\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{3a+2}}{\sqrt{3x+2}\sqrt{3a+2}(x-a)} \times \frac{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3a+2}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{3a+2}} = \\
&= -3\frac{(3x+2)-(3a+2)}{\sqrt{3x+2}\sqrt{3a+2}(x-a)(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3a+2})} = \\
&= -9\frac{x-a}{\sqrt{3x+2}\sqrt{3a+2}(x-a)(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3a+2})} = \\
&= -9\frac{1}{\sqrt{3x+2}\sqrt{3a+2}(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3a+2})} \text{ si } x-a \neq 0.
\end{aligned}
$$

Por lo que:

$$
\begin{aligned}
h'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \\
&= \lim_{x\to a} -9\frac{1}{(\sqrt{3x+2})(\sqrt{3a+2})(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3a+2})} = \\
&= -9\frac{1}{(\sqrt{3a+2})^2(2)\sqrt{3a+2}} = \\
&= -\frac{9}{2}\frac{1}{(3a+2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Hemos obtenido, por lo tanto, que en todo punto:

$[a, h(a)] = \left(a, \dfrac{3}{\sqrt{3a+2}}\right)$, con $a > -\dfrac{2}{3}$, pues $D_f = \left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$, de la gráfica de la función h, la pendiente de la recta tangente vale $h'(a) = -\dfrac{9}{2}\dfrac{1}{(3a+2)^{\frac{3}{2}}}$.

Concluimos con esto que $h'(x) = -\dfrac{9}{2}\dfrac{1}{(3x+2)^{\frac{3}{2}}}$ si $x > -\dfrac{2}{3}$.

Usando este resultado:

$$
\begin{aligned}
h'(0) &= -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{9}{4\sqrt{2}};\\
h'(8) &= -\frac{9}{2}\left(\frac{1}{26}\right)^{\frac{3}{2}} = -\frac{9}{52\sqrt{26}}.
\end{aligned}
$$

□

2. Utilizando la regla de los cuatro pasos, calcular la derivada de la función $f(x) = \dfrac{4}{3x}$ en

   a. $x = a$.

   b. $x = 2$.

   c. $x = -\dfrac{2}{3}$.

   Obtener además:

   d. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto P de abscisa 2.

   e. La ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto Q de abscisa $-\dfrac{2}{3}$.

▼

a.
$$f(x) = \frac{4}{3x} \Rightarrow f(a) = \frac{4}{3a};$$
$$\Delta y = f(x) - f(a) = \frac{4}{3x} - \frac{4}{3a} = \frac{4a - 4x}{3xa} = \frac{4(a-x)}{3ax};$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}(\Delta y) = \frac{1}{x-a}\left[\frac{4(a-x)}{3ax}\right] = \frac{4(a-x)}{(x-a)3ax};$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{x \to a}\frac{4(a-x)}{3ax(x-a)} = \lim_{x \to a}\frac{-4(x-a)}{3ax(x-a)} =$$
$$= \lim_{x \to a}\frac{-4}{3ax} = \frac{-4}{3aa} = -\frac{4}{3a^2}.$$

Por lo tanto: $f'(a) = \dfrac{-4}{3a^2}$.

b. $f'(2) = f'(a = 2) = \dfrac{-4}{3(2)^2} = \dfrac{-1}{3} \Rightarrow f'(2) = -\dfrac{1}{3}$.

c. $f'\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{-4}{3\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = -\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{9}{4}\right) = -3 \Rightarrow f'\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -3$.

d. La abscisa del punto P es $x = 2$.

La ordenada del punto P es $y = f(2) = \dfrac{4}{3(2)} = \dfrac{2}{3}$.

La pendiente de la recta tangente en P es $m_t = f'(2) = -\dfrac{1}{3}$.

La ecuación de la recta tangente en P es:

$$y - f(2) = m_t(x-2) \Rightarrow y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \text{ o bien } x + 3y - 4 = 0.$$

e. La abscisa del punto Q es $x = -\dfrac{2}{3}$.

La ordenada del punto Q es $y = f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{3\left(-\dfrac{2}{3}\right)} = -2$.

La pendiente de la recta tangente en Q es $m_t = f'\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -3$.

La pendiente de la recta normal en Q es $m_n = \dfrac{-1}{m_t} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3}$.

La ecuación de la recta normal en Q es:

$$y - f\left(-\frac{2}{3}\right) = m_n\left(x + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{9} \text{ o bien } 3x - 9y - 16 = 0.$$

□

3. Para la función $g(x) = \sqrt{2x-1}$, y mediante la regla de los cuatro pasos, determinar:
   a. $g'(a)$.
   b. $g'\left(\frac{5}{2}\right)$.
   c. $g'(3)$.

Obtener además:

   d. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{2x-1}$ en el punto P de abscisa $\frac{5}{2}$.
   e. La ecuación de la recta normal a la curva $y = \sqrt{2x-1}$ en el punto Q de abscisa 3.

▼

a. $g(x) = \sqrt{2x-1}$; $g(a) = \sqrt{2a-1}$ y además $\Delta x = x - a$;
$\Delta y = g(x) - g(a) = \sqrt{2x-1} - \sqrt{2a-1}$;
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2a-1}}{x-a}$.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{x \to a}\frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2a-1}}{x-a} = \lim_{x \to a}\frac{(\sqrt{2x-1} - \sqrt{2a-1})(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2a-1})}{(x-a)(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2a-1})} =$$

$$= \lim_{x \to a}\frac{(2x-1) - (2a-1)}{(x-a)(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2a-1})} = \lim_{x \to a}\frac{2(x-a)}{(x-a)(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2a-1})} =$$

$$= \lim_{x \to a}\frac{2}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2a-1}} = \frac{2}{\sqrt{2a-1} + \sqrt{2a-1}} = \frac{2}{2\sqrt{2a-1}} = \frac{1}{\sqrt{2a-1}}.$$

Por lo tanto: $g'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2a-1}}$, para $a > \dfrac{1}{2}$.

b. $g'\left(\frac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\left(\frac{5}{2}\right)) - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow g'\left(\frac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

c. $g'(3) = \dfrac{1}{\sqrt{2(3)-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow g'(3) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

d. La abscisa del punto P es $x = \dfrac{5}{2}$.

La ordenada del punto P es $y = g\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{2\left(\frac{5}{2}\right) - 1} = \sqrt{4} = 2$.

La pendiente de la recta tangente en P es $m_t = g'\left(\frac{5}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

La ecuación de la recta tangente en P es:

$$y - g\left(\frac{5}{2}\right) = m_t\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \text{ o bien } 2x - 4y + 3 = 0.$$

e. La abscisa del punto Q es $x = 3$.
La ordenada del punto Q es $y = g(3) = \sqrt{2(3) - 1} = \sqrt{5}$.
La pendiente de la recta normal en Q es $m_n = \dfrac{-1}{m_t} = \dfrac{-1}{g'(3)} = \dfrac{-1}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = -\sqrt{5}$.

La ecuación de la recta normal en Q es:

$$y - g(3) = m_n(x - 3) \Rightarrow y - \sqrt{5} = -\sqrt{5}(x - 3) \Rightarrow y = -\sqrt{5}x + 3\sqrt{5} + \sqrt{5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\sqrt{5}x + 4\sqrt{5} \text{ o bien } \sqrt{5}x + y - 4\sqrt{5} = 0.$$

□

5.3 Velocidad instantánea

Ejercicios 5.3.1

1. Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 320t\,.$$

a. Encuentre las velocidades promedio durante los intervalos [3, 4], [3.5, 4], [4, 5], [4, 4.5].
b. Calcule $v(4)$, usando la definición de la derivada.

▼

a. La función posición es $h(t) = -16t^2 + 320t$, con $t \geq 0$.
La velocidad promedio en el intervalo [3, 4] es:

$$\overline{v}_1 = \frac{h(4) - h(3)}{4 - 3} = \frac{1\,024 - 816}{1} = 208 \Rightarrow \overline{v}_1 = 208 \text{ pies/s.}$$

La velocidad promedio en el intervalo [3.5, 4] es:

$$\overline{v}_2 = \frac{h(4) - h(3.5)}{4 - 3.5} = \frac{1\,024 - 924}{0.5} = 200 \Rightarrow \overline{v}_2 = 200 \text{ pies/s.}$$

La velocidad promedio en el intervalo [4, 5] es:

$$\overline{v}_3 = \frac{h(5) - h(4)}{5 - 4} = \frac{1\,200 - 1\,024}{1} = 176 \Rightarrow \overline{v}_3 = 176 \text{ pies/s.}$$

La velocidad promedio en el intervalo [4, 4.5] es:

$$\overline{v}_4 = \frac{h(4.5) - h(4)}{4.5 - 4} = \frac{1\,116 - 1\,024}{0.5} = 184 \Rightarrow \overline{v}_4 = 184 \text{ pies/s.}$$

b. Siendo así,

$$v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{h(t) - h(4)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{(-16t^2 + 320t) - 1\,024}{t - 4} =$$
$$= \lim_{t \to 4} \frac{-16(t^2 - 20t + 64)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{-16(t - 4)(t - 16)}{(t - 4)} =$$
$$= \lim_{t \to 4} [-16(t - 16)] = -16(4 - 16) = -16(-12) = 192.$$

Entonces: $v(4) = 192$ pies/s. □

2. En un movimiento rectilíneo, la posición de una partícula a los t segundos es $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$.

   a. Encontrar la velocidad promedio en el recorrido efectuado entre los 3 y los 5 s.
   b. Encontrar la velocidad instantánea a los 3 s. Obtenerla mediante la definición de la derivada.

▼

   a. Vemos que

$$\overline{v} = \frac{s(5) - s(3)}{5 - 3} = \frac{(2 \times 5^2 - 3 \times 5 + 1) - (2 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1)}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ unidades/s.}$$

   b. Calculamos el cociente diferencial en $t = 3$

$$\frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \frac{2t^2 - 3t + 1 - 10}{t - 3} = \frac{2t^2 - 3t - 9}{t - 3}\,. \qquad (*)$$

Si tratamos de calcular el límite por evaluación, obtenemos una indeterminación del tipo "$\left(\frac{0}{0}\right)$", lo cual nos dice que $t - 3$ es un divisor del polinomio del numerador.
Hagamos la división

$$\begin{array}{r|l} & 2t + 3 \\ \hline t - 3 & 2t^2 - 3t - 9 \\ & \underline{-2t^2 + 6t} \\ & \qquad 3t \\ & \qquad \underline{-3t + 9} \\ & \qquad\quad 0\,. \end{array}$$

Sustituyendo en (*)

$$\frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \frac{(t - 3)(2t + 3)}{t - 3} = 2t + 3, \quad \text{si } t \neq 3, \text{ es decir, si } t - 3 \neq 0.$$

Entonces:

$$v(3) = s'(3) = \lim_{t \to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \lim_{t \to 3}(2t + 3) = 9 \text{ unidades/s.}$$

□

3. En un movimiento rectilíneo, la posición de un automóvil a las t horas es:

$$s(t) = 50t - \frac{7}{t + 1} \text{ km.}$$

   a. ¿Cuál es la velocidad promedio durante las 2 primeras horas?
   b. ¿Cuál es la velocidad instantánea a las 2 horas? Obtenerla mediante la definición de la derivada.

▼

   a. La velocidad promedio se calcula como

$$\overline{v} = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{\left(100 - \frac{7}{3}\right) - (-7)}{2} = \frac{100 - \frac{7}{3} + 7}{2} =$$

$$= \frac{\frac{321 - 7}{3}}{2} = \frac{314}{6} = 52.\overline{3} \text{ km/h.}$$

b. Calculamos el cociente diferencial

$$\frac{s(t)-s(2)}{t-2}=\frac{\left(50t-\dfrac{7}{t+1}\right)-\dfrac{293}{3}}{t-2}=\frac{\dfrac{150t(t+1)-21-293(t+1)}{3(t+1)}}{t-2}=$$
$$=\frac{150t^2+150t-21-293t-293}{3(t+1)(t-2)}=\frac{150t^2-143t-314}{3(t+1)(t-2)}\,. \qquad (*)$$

Si tratamos de calcular el límite por evaluación cuando $t\to 2$, obtenemos una indeterminación "$\left(\dfrac{0}{0}\right)$". Esto significa que $t-2$ es un divisor del polinomio $150t^2-143t-314$.

Hagamos la división:

$$\begin{array}{r|l} & 150t+157 \\ \hline t-2 & 150t^2-143t-314 \\ & \underline{-150t^2+300t} \\ & \qquad\quad +157t \\ & \qquad\quad \underline{-157t+314} \\ & \qquad\qquad\quad 0\,. \end{array}$$

Sustituyendo en (*):

$$\frac{s(t)-s(2)}{t-2}=\frac{(150t+157)(t-2)}{3(t+1)(t-2)}=\frac{150t+157}{3(t+1)},\ \text{si } t\neq 2, \text{ es decir, si } t-2\neq 0.$$

Calculando el límite

$$v(2)=s'(2)=\lim_{t\to 2}\frac{s(t)-s(2)}{t-2}=$$
$$=\lim_{t\to 2}\frac{150t+157}{3(t+1)}=\frac{300+157}{9}=\frac{457}{9}=50.\overline{7}\ \text{km/h}.$$

□

4. Un caracol baja por una pared. Su posición a las t horas está dada por $s(t)=1-0.2\sqrt{t}$ m. Usando la definición de la derivada, calcular su velocidad instantánea para $t=4$ h.

▼ La velocidad media del caracol en las cercanías de $t=4$ viene dada por el cociente diferencial de la función $s(t)$:

$$\frac{s(t)-s(4)}{t-4}=\frac{(1-0.2\sqrt{t})-(1-0.2\times\sqrt{4})}{t-4}=\frac{-0.2\sqrt{t}+0.2\times(2)}{t-4}=\frac{-0.2(\sqrt{t}-2)}{t-4}=$$
$$=-0.2\left(\frac{\sqrt{t}-2}{t-4}\right)\left(\frac{\sqrt{t}+2}{\sqrt{t}+2}\right)=-0.2\frac{t-4}{(t-4)(\sqrt{t}+2)}=-0.2\frac{1}{\sqrt{t}+2}=\frac{-0.2}{\sqrt{t}+2},\ \text{para } t\neq 4.$$

Tenemos entonces que la velocidad instantánea en el momento $t=4$ viene dada por:

$$\lim_{t\to 4}\frac{s(t)-s(4)}{t-4}=\lim_{t\to 4}\frac{-0.2}{\sqrt{t}+2}=\frac{-0.2}{\sqrt{4}+2}=\frac{-0.2}{2+2}=\frac{-0.2}{4}=-0.05.$$

Lo cual nos dice que el caracol en el instante $t=4$ se está moviendo hacia abajo (en la dirección negativa del eje) con una velocidad de -0.05 m/h. □

5. Se deja caer una pelota desde lo alto de un edificio; la posición de la pelota en el tiempo t es:

$$s(t)=78.4-4.9t^2.$$

a. Calcule la velocidad instantánea en el tiempo $t = 4$, usando la definición de la derivada.
b. Calcule la posición de la pelota en $t = 4$.
c. Dé una interpretación de su resultado.

▼

a. Tenemos

$$\begin{aligned}
s(4+h) &= 78.4 - 4.9(4+h)^2 = 78.4 - 4.9(16 + 8h + h^2) = \\
&= 78.4 - 78.4 - 39.2h - 4.9h^2 = -39.2h - 4.9h^2; \\
s(4) &= 78.4 - 4.9(4^2) = 78.4 - 4.9(16) = 78.4 - 78.4 = 0; \\
s(4+h) - s(4) &= -39.2h - 4.9h^2 - 0 = h(-39.2 - 4.9h); \\
\frac{s(4+h) - s(4)}{h} &= \frac{h(-39.2 - 4.9h)}{h} = -39.2 - 4.9h \text{ si } h \neq 0; \\
\lim_{h \to 0} \frac{s(4+h) - s(4)}{h} &= \lim_{h \to 0} (-39.2 - 4.9h) = \\
&= -39.2 - 4.9(0) = -39.2 - 0 = -39.2\,.
\end{aligned}$$

Que nos indica la velocidad de la pelota en el instante $t = 4$.

b. $s(4) = 0$, ya calculado en el inciso (a), en ese instante llega al suelo.
c. Al llegar al suelo la pelota tiene una velocidad de -39.2.

□

6. Un helicóptero se está elevando verticalmente desde el suelo. La distancia del helicóptero al suelo t segundos después del despegue es $s(t)$ metros, donde

$$s(t) = t^2 + t\,.$$

a. ¿En qué instante se encuentra el helicóptero a 20 m?
b. Use la definición de la derivada para determinar la velocidad instantánea del helicóptero cuando éste se encuentra a 20 m.

▼

a. $s(t) = 20 \Leftrightarrow t^2 + t = 20 \Leftrightarrow t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow (t+5)(t-4) = 0 \Leftrightarrow t = -5$ o bien $t = 4$. Luego, $s(t) = 20$ metros cuando $t = 4$ segundos, ya que $t = -5$ se desecha por ser negativo.
b. La velocidad instantánea en $t = 4$ es:

$$\begin{aligned}
v(4) &= \lim_{h \to 0} \frac{s(4+h) - s(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(4+h)^2 + (4+h)] - [4^2 + 4]}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{16 + 8h + h^2 + 4 + h - 20}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(9+h)}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} (9 + h) = 9\,.
\end{aligned}$$

Es decir, $v(4) = 9$ m/s.

□

7. Un objeto se lanza hacia arriba según la ley de movimiento:

$$s(t) = 15t - 4.9t^2\,,$$

donde $s(t)$ denota la posición en metros del objeto a los t segundos. Calcular la velocidad instantánea del objeto a los 2 s.

▼ Calculamos el cociente diferencial de la función $s(t)$ en el tiempo $t = 2$:

$$\frac{s(t)-s(2)}{t-2} = \frac{(15t-4.9t^2)-(15\times 2-4.9\times 2^2)}{t-2} = \frac{15(t-2)-4.9(t^2-4)}{t-2} =$$
$$= \frac{15(t-2)-4.9(t-2)(t+2)}{t-2} = \frac{(t-2)[15-4.9(t+2)]}{t-2} = 15-4.9(t+2) \text{ para } t \neq -2\,.$$

Esta expresión representa la velocidad media para valores de t cercanos a 2 s.

La velocidad instantánea del objeto a los 2 segundos se calcula mediante

$$s'(2) = \lim_{t\to 2}\frac{s(t)-s(2)}{t-2} = \lim_{t\to 2}[15-4.9(t+2)] = 15-4.9(4) = -4.6 \text{ m/s}.$$

□

8. Se lanza una pelota al aire desde un puente. La posición de la pelota en el tiempo $t \geq 0$ está dada por

$$y(t) = -16t^2 + 50t + 36\,.$$

a. ¿Cuál es la altura del puente?

b. ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando se encuentra a 70 pies sobre el suelo?

▼

a. Ya que $y(t)$ es la posición, medida en pies, de la pelota (con respecto al suelo) en el segundo $t \geq 0$, entonces la altura del puente es, precisamente,

$$y(t=0) = 36 \text{ pies}.$$

b. La velocidad instantánea en $t \geq 0$ es:

$$v(t) = \frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}(-16t^2+50t+36) =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-16(t+h)^2+50(t+h)+36-(-16t^2+50t+36)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-32th-16h^2+50h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(-32t-16h+50)}{h} = \lim_{h\to 0}(-32t-16h+50) =$$
$$= (-32t+50) \text{ pies/s}.$$

La pelota está a 70 pies sobre el suelo cuando $y(t) = 70$.

$$y(t) = 70 \;\Leftrightarrow\; -16t^2+50t+36 = 70 \;\Leftrightarrow\; -16t^2+50t-34 = 0 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 2(-8t^2+25t-17) = 0 \;\Leftrightarrow\; -8t^2+25t-17 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t = \frac{-25\pm\sqrt{(25)^2-4(-8)(-17)}}{2(-8)} = \frac{-25\pm\sqrt{625-544}}{-16} = \frac{-25\pm 9}{-16} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; t_1 = \frac{-25+9}{-16} = \frac{-16}{-16} = 1 \;\&\; t_2 = \frac{-25-9}{-16} = \frac{-34}{-16} = 2.125\,;$$

es decir, la pelota está a 70 pies sobre el suelo en los instantes $t_1 = 1$ s & $t_2 = 2.125$ s.
Las velocidades en esos instantes son:

$$v_1 = v(t_1=1) = -32t_1+50 = -32(1)+50 = 18 \text{ pies/s}.$$
$$v_2 = v(t_2=2.125) = -32t_2+50 = -32(2.125)+50 = -18 \text{ pies/s}.$$

Esto es, $v_1 = 18$ pies/s (de subida) & $v_2 = -18$ pies/s (de bajada). □

9. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta está dado por

$$s(t) = t^2 - 6t + 10\,,$$

donde el tiempo t se mide en segundos.

a. Calcule la velocidad instantánea en el tiempo t usando la definición de la derivada.
b. Determine la velocidad instantánea cuando la posición de la partícula es 10 m.

▼

a. La velocidad instantánea es:

$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}\,;$$
$$s(t) = t^2 - 6t + 10\,;$$
$$s(t+h) = (t+h)^2 - 6(t+h) + 10 = t^2 + 2th + h^2 - 6t - 6h + 10\,;$$
$$s(t+h) - s(t) = (t^2 + 2th + h^2 - 6t - 6h + 10) - (t^2 - 6t + 10)\,;$$
$$s(t+h) - s(t) = 2th + h^2 - 6h = h(2t + h - 6)\,;$$
$$v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2t+h-6)}{h} = \lim_{h\to 0}(2t+h-6) = (2t-6)\ \text{m/s}\,,$$

que es la velocidad instantánea en cualquier instante t.

b. Primero determinamos el instante en que $s(t) = 10$ m.

$$s(t) = 10 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 10 = 10 \Leftrightarrow t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t(t-6) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t = 0 \text{ o bien } t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ o bien } t = 6\,.$$

Luego calculamos las velocidades en estos instantes

$$\text{v}(t=0) = 2(0) - 6 = -6 \Rightarrow \text{v}(0) = -6\ \text{m/s}\,;$$
$$\text{v}(t=6) = 2(6) - 6 = 6 \Rightarrow \text{v}(6) = 6\ \text{m/s}\,.$$

□

10. Se lanza una pelota hacia arriba. La función de posición de la pelota en el tiempo t es:

$$s(t) = 5t - 10t^2\,.$$

a. Calcule la velocidad instantánea (v) en el tiempo $t = 1/4$ usando la definición de la derivada.
b. Calcule la posición de la pelota en el instante $t = 1/4$.
c. Dé una interpretación de sus resultados.

▼

a. Vemos que

$$s(t) = 5t - 10t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s\left(\frac{1}{4}\right) = 5\left(\frac{1}{4}\right) - 10\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{4} - 10\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{4} - \frac{5}{8} = \frac{5}{8}\,;$$
$$s\left(\frac{1}{4}+h\right) = 5\left(\frac{1}{4}+h\right) - 10\left(\frac{1}{4}+h\right)^2 = \frac{5}{4} + 5h - 10\left(\frac{1}{16} + \frac{2}{4}h + h^2\right) =$$
$$= \frac{5}{4} + 5h - \frac{5}{8} - 5h - 10h^2 = \frac{5}{8} - 10h^2\,;$$
$$s\left(\frac{1}{4}+h\right) - s\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8} - 10h^2 - \frac{5}{8} = -10h^2\,;$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{s(1/4+h) - s(1/4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-10h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-10h) = 0\,.$$

La velocidad instantánea en $t = \frac{1}{4}$ es $v = 0$.

b. La posición en $t = \frac{1}{4}$ es $s\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{8}$.

c. Se infiere que la posición en $t = \frac{1}{4}$ es la altura máxima de la pelota, ya que su velocidad instantánea en $t = \frac{1}{4}$ es $v = 0$.

□

11. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es:

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

donde G es la constante gravitacional y donde r es la distancia entre los cuerpos.

a. Si los cuerpos se están moviendo, encuentre $\frac{dF}{dr}$ y explique su significado.

b. Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye a razón de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esa fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

▼

a. Calculamos:

$$\frac{dF}{dr} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{GmM}{(r+h)^2} - \dfrac{GmM}{r^2}}{h} = GmM \lim_{h \to 0} \left[\frac{r^2 - (r+h)^2}{hr^2(r+h)^2}\right] =$$
$$= GmM \lim_{h \to 0} \left[\frac{-2rh - h^2}{hr^2(r+h)^2}\right] = GmM \lim_{h \to 0} \left[\frac{-2r - h}{r^2(r+h)^2}\right] =$$
$$= GmM \left[\frac{-2r}{r^4}\right] = -\frac{2GmM}{r^3}.$$

b. Por un lado tenemos

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=20\,000} = -2,$$

y por otro

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=20\,000} = -\frac{2GmM}{(20\,000)^3};$$

luego,

$$-\frac{2GmM}{(20\,000)^3} = -2 \Rightarrow GmM = (20\,000)^3;$$

por lo que

$$\left.\frac{dF}{dr}\right|_{r=10\,000} = \frac{-2 \times (20\,000)^3}{(10\,000)^3} = -2 \times 2^3 = -16 \text{ N/km}.$$

□

12. Si se lanza verticalmente un objeto hacia arriba desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial de 320 pies/s, entonces su distancia h arriba del suelo después de t segundos está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 320t\,.$$

a. ¿Para qué valores de t el objeto estará a más de 1 536 pies sobre el suelo?
b. Calcule $v(4)$ usando la definición de velocidad instantánea.
c. ¿A qué velocidad impactará contra el suelo y en qué momento?

▼

a. Se cumple la condición si:

$$h(t) > 1536 \Leftrightarrow -16t^2 + 320t > 1536 \Leftrightarrow -16t^2 + 320t - 1536 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -16(t^2 - 20t + 96) > 0 \Leftrightarrow t^2 - 20t + 96 < 0.$$

Primero resolvemos la igualdad $t^2 - 20t + 96 = 0$.

$$t = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(96)}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 384}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{20 \pm 4}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{20 + 4}{2} = \frac{24}{2} = 12 \;\&\; t_2 = \frac{20 - 4}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Debido a que la variable t representa el tiempo, debemos considerar que $t \geq 0$. Esto nos lleva a generar los intervalos $[0, 8)$, $(8, 12)$ y $(12, +\infty)$, en los cuales veremos el signo de $t^2 - 20t + 96$.

	Valor de prueba	$t^2 - 20t + 96$
$0 \leq t < 8$	$t = 5$	$21 > 0$
$8 < t < 12$	$t = 10$	$-4 < 0$
$12 < t < \infty$	$t = 20$	$96 > 0$

La desigualdad $t^2 - 20t + 96 < 0$ se cumple para $8 < t < 12$.
Luego, el objeto estará por encima de los 1 536 pies, cuando $8 < t < 12$.

b. Su velocidad en el instante $t = a$ segundos es:

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{h(t) - h(a)}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{(-16t^2 + 320t) - (-16a^2 + 320a)}{t - a} =$$
$$= \lim_{t \to a} \frac{-16t^2 + 320t + 16a^2 - 320a}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{-16(t^2 - a^2) + 320(t - a)}{t - a} =$$
$$= \lim_{t \to a} \frac{-16(t - a)(t + a) + 320(t - a)}{t - a} = \lim_{t \to a} \frac{-16(t - a)[(t + a) - 20]}{(t - a)} =$$
$$= \lim_{t \to a} [-16(t + a - 20)] = -16(a + a - 20) = -16(2a - 20) = -32a + 320;$$
$$v(a) = -32a + 320 \text{ pies/s}.$$

Por lo tanto, para $a = 4$:

$$v(4) = -32(4) + 320 = -128 + 320 = 192 \text{ pies/s}.$$

c. El impacto contra el suelo:

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -16t^2 + 320t = 0 \Leftrightarrow -16t(t - 20) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -16t = 0 \text{ o bien } t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ o bien } t = 20.$$
$$v(a) = -32a + 320 \Rightarrow v(0) = 320 \text{ pies/s hacia arriba}.$$
$$v(20) = -32(20) + 320 = -640 + 320 = -320;$$
$$v(20) = -320 \text{ pies/s hacia abajo} = \text{velocidad con la que el objeto choca contra el suelo}.$$

□

13. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 25 m/s, entonces su altura después de t segundos es:

$$s(t) = -5t^2 + 25t\,.$$

a. Determine el dominio de la función.

b. ¿Para qué valores de t la pelota se encuentra a más de 30 m del suelo?

c. ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está a 20 m?

▼

a. La función altura o de posición con respecto al suelo es: $s(t) = -5t^2 + 25t$.

El dominio de esta función es:

$$\begin{aligned} D_s &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, s(t) \geq 0 \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, -5t^2 + 25t \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, 5t(-t + 5) \geq 0 \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, -t + 5 \geq 0 \right\} = \\ &= \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, 5 \geq t \right\} = \left\{ t \geq 0 \,\middle|\, t \leq 5 \right\} = \left\{ t \,\middle|\, 0 \leq t \leq 5 \right\} = \\ &= [0, 5]\,. \end{aligned}$$

b. Se cumple si:

$$\begin{aligned} s(t) > 30 \;&\Leftrightarrow\; -5t^2 + 25t > 30 \;\Leftrightarrow\; -5t^2 + 25t - 30 > 0 \;\Leftrightarrow\; -5(t^2 - 5t + 6) > 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; t^2 - 5t + 6 < 0 \;\Leftrightarrow\; (t - 2)(t - 3) < 0. \end{aligned}$$

Desigualdad que se cumple cuando

$$\begin{array}{ccc} t - 2 < 0 \;\; \& \, t - 3 > 0 & \text{o bien} & t - 2 > 0 \;\; \& \, t - 3 < 0; \\ t < 2 \;\; \& \, t > 3 & \text{o bien} & t > 2 \;\; \& \, t < 3; \\ t < 2 \;\; \& \, t > 3 & \text{o bien} & 2 < t < 3. \end{array}$$

Ya que no hay $t \in \mathbb{R}$ tales que $t < 2$ & $t > 3$, entonces la desigualdad se cumple sólo cuando $2 < t < 3$.

Por lo tanto, la desigualdad $s(t) > 30$ se cumple cuando, y sólo cuando, $2 < t < 3$.

c. Primero determinamos los instantes en que la pelota está 20 metros arriba del suelo.

$$\begin{aligned} s(t) = 20 \;&\Leftrightarrow\; -5t^2 + 25t = 20 \;\Leftrightarrow\; -5t^2 + 25t - 20 = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; -5(t^2 - 5t + 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 5t + 4 = 0 \;\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; (t - 1)(t - 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 1 \text{ o bien } t = 4. \end{aligned}$$

Luego calculamos la velocidad intantánea de la pelota en cualquier instante t.

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt}s(t) = \frac{d}{dt}(-5t^2 + 25t) = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-5(t + h)^2 + 25(t + h) - (-5t^2 + 25t)}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-5(t^2 + 2th + h^2) + 25t + 25h + 5t^2 - 25t}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-10th - 5h^2 + 25h}{h} = \lim_{h \to 0}(-10t - 5h + 25) = \\ &= -10t + 25. \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos $v(1) = v(t = 1)$ & $v(4) = v(t = 4)$:

$$\begin{aligned} v(1) &= -10(1) + 25 = -10 + 25 = 15 \;\Rightarrow\; v(1) = 15 \text{ m/s}. \\ v(4) &= -10(4) + 25 = -40 + 25 = -15 \;\Rightarrow\; v(4) = -15 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

El signo positivo de $v(1) = 15$ m/s nos indica que la pelota va hacia arriba y el signo negativo de $v(4) = -15$ m/s nos dice que la pelota se dirige hacia abajo.

□

CAPÍTULO

6

Reglas de derivación

6.1 Reglas básicas de derivación

Ejercicios 6.1.1 *Utilizando reglas de derivación, calcular la derivada de las funciones siguientes:*

1. $f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$.

▼

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3) = 0 - 2(1) + 3(2x) - 4(3x^2);$$
$$f'(x) = -2 + 6x - 12x^2.$$

□

2. $g(x) = \dfrac{3x^{10}}{5} - \dfrac{4x^6}{3} + \dfrac{5x^3}{6} - \dfrac{9}{2}$.

▼

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x^{10}}{5} - \frac{4x^6}{3} + \frac{5x^3}{6} - \frac{9}{2}\right) =$$
$$= \frac{3}{5}(10x^9) - \frac{4}{3}(6x^5) + \frac{5}{6}(3x^2) - 0 = 6x^9 - 8x^5 + \frac{5}{2}x^2.$$

□

3. $h(t) = \dfrac{2}{3t} - \dfrac{3}{4t^2} + \dfrac{4}{5t^3} - \dfrac{5}{6t^4}$.

▼
$$h'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3t} - \frac{3}{4t^2} + \frac{4}{5t^3} - \frac{5}{6t^4}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}t^{-1} - \frac{3}{4}t^{-2} + \frac{4}{5}t^{-3} - \frac{5}{6}t^{-4}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}(-t^{-2}) - \frac{3}{4}(-2t^{-3}) + \frac{4}{5}(-3t^{-4}) - \frac{5}{6}(-4t^{-5}) =$$
$$= -\frac{2}{3t^2} + \frac{3}{2t^3} - \frac{12}{5t^4} + \frac{10}{3t^5}.$$

□

4. $y = 4\sqrt{x^3} - 6\sqrt[3]{x^4} + 8\sqrt[4]{x^5}$.

▼
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(4\sqrt{x^3} - 6\sqrt[3]{x^4} + 8\sqrt[4]{x^5}\right) = 4\frac{d}{dx}x^{3/2} - 6\frac{d}{dx}x^{4/3} + 8\frac{d}{dx}x^{5/4} =$$
$$= 4\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) - 6\left(\frac{4}{3}x^{1/3}\right) + 8\left(\frac{5}{4}x^{1/4}\right) = 6\sqrt{x} - 8\sqrt[3]{x} + 10\sqrt[4]{x}.$$

□

5. $u = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$.

▼
$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt[3]{y}} - \frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right) = \frac{d}{dy}\left(y^{-1/2} - y^{-1/3} - y^{-1/4}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}y^{-3/2} + \frac{1}{3}y^{-4/3} + \frac{1}{4}y^{-5/4} = \frac{-1}{2y^{3/2}} + \frac{1}{3y^{4/3}} + \frac{1}{4y^{5/4}} =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{y^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{y^4}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{y^5}}.$$

□

6. $x = \frac{3y^2 - 4y + 5}{6\sqrt{y}}$.

▼
$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{3y^2 - 4y + 5}{6\sqrt{y}}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{3}{6}y^{2-\frac{1}{2}} - \frac{4}{6}y^{1-\frac{1}{2}} + \frac{5}{6}y^{-1/2}\right) =$$
$$= \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}y^{3/2} - \frac{2}{3}y^{1/2} + \frac{5}{6}y^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}\right) + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}y^{-3/2}\right) =$$
$$= \frac{3}{4}y^{1/2} - \frac{1}{3y^{1/2}} - \frac{5}{12y^{3/2}} = \frac{3}{4}\sqrt{y} - \frac{1}{3\sqrt{y}} - \frac{5}{12\sqrt{y^3}}.$$

O directamente:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{3y^2-4y+5}{6\sqrt{y}}\right)=\frac{(6y-4)6y^{\frac{1}{2}}-3y^{-\frac{1}{2}}(3y^2-4y+5)}{36y}=$$
$$=\frac{36y^{\frac{3}{2}}-24y^{\frac{1}{2}}-9y^{\frac{3}{2}}+12y^{\frac{1}{2}}-15y^{-\frac{1}{2}}}{36y}=$$
$$=\frac{27y^{\frac{3}{2}}-12y^{\frac{1}{2}}-15y^{-\frac{1}{2}}}{36y}=\frac{9y^{\frac{1}{2}}-4y^{-\frac{1}{2}}-5y^{-\frac{3}{2}}}{12}=$$
$$=\frac{3}{4}\sqrt{y}-\frac{1}{3\sqrt{y}}-\frac{5}{12\sqrt{y^3}}.$$

□

7. $y=\left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

▼
$$y'=\frac{d}{dx}\left[\left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]=$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}-x^{-1/2}\right)+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\frac{d}{dx}\left(x-x^{-1}+x^{-2}\right)=$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}+\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+x^{-2}-2x^{-3}\right)=$$
$$=\left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)+\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right).$$

O efectuando el producto primero:

$$y=(x-x^{-1}+x^{-2})(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})=$$
$$=x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{5}{2}}=$$
$$=x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{5}{2}}.$$

Y derivamos después:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}-3x^{-\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}=$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-\frac{3}{\sqrt{x^5}}+\frac{5}{2\sqrt{x^7}}.$$

□

8. $z=(x^3+1)^2(x^2-1)^3$.

▼
$$z'=\frac{d}{dx}\left[(x^3+1)^2(x^2-1)^3\right]=$$
$$=(x^3+1)^2\frac{d}{dx}(x^2-1)^3+(x^2-1)^3\frac{d}{dx}(x^3+1)^2=$$
$$=(x^3+1)^2\frac{d}{dx}(x^6-3x^4+3x^2-1)+(x^2-1)^3\frac{d}{dx}(x^6+2x^3+1)=$$
$$=(x^3+1)^2(6x^5-12x^3+6x-0)+(x^2-1)^3(6x^5+6x^2+0)=$$
$$=(x^3+1)^2(6x^5-12x^3+6x)+(x^2-1)^3(6x^5+6x^2).$$

□

9. $x = \dfrac{1+t^3}{1-t^3}$.

▼
$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1+t^3}{1-t^3}\right) = \frac{(1-t^3)\frac{d}{dt}(1+t^3) - (1+t^3)\frac{d}{dt}(1-t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{(1-t^3)(3t^2) - (1+t^3)(-3t^2)}{(1-t^3)^2} =$$
$$= \frac{3t^2(1-t^3+1+t^3)}{(1-t^3)^2} = \frac{6t^2}{(1-t^3)^2}.$$

□

10. $y = \dfrac{2x}{x^2+4}$.

▼
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x^2+4}\right) = \frac{(x^2+4)(2) - (2x)(2x)}{(x^2+4)^2} =$$
$$= \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2} = \frac{2(4-x^2)}{(x^2+4)^2}.$$

□

11. $w = \dfrac{3u+2}{4u^2-9}$.

▼
$$\frac{dw}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{3u+2}{4u^2-9}\right) = \frac{(4u^2-9)(3) - (3u+2)(8u)}{(4u^2-9)^2} =$$
$$= \frac{12u^2-27-24u^2-16u}{(4u^2-9)^2} = \frac{-12u^2-16u-27}{(4u^2-9)^2} = -\frac{12u^2+16u+27}{(4u^2-9)^2}.$$

□

12. $v = \dfrac{1}{w^2-w+1}$.

▼
$$\frac{dv}{dw} = \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{w^2-w+1}\right) = \frac{(w^2-w+1)(0) - 1(2w-1)}{(w^2-w+1)^2} =$$
$$= \frac{-2w+1}{(w^2-w+1)^2} = \frac{1-2w}{(w^2-w+1)^2}.$$

□

6.2 Regla de la cadena

Ejercicios 6.2.1 *Utilizando reglas de derivación, calcular la derivada de las funciones siguientes:*

1. $y = (3x^4-2)^5$.

▼
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4-2)^5 = 5(3x^4-2)^4\frac{d}{dx}(3x^4-2) =$$
$$= 5(3x^4-2)^4(3)(4x^3) = 60x^3(3x^4-2)^4.$$

□

2. $u = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)^{10}$.

▼
$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t + \frac{1}{t}\right)^{10} = 10\left(t + \frac{1}{t}\right)^{9} \frac{d}{dt}(t + t^{-1}) =$$
$$= 10\left(t + \frac{1}{t}\right)^{9}(1 - t^{-2}) = 10\left(t + \frac{1}{t}\right)^{9}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right).$$

□

3. $z = 4\sqrt{1 - y^2}$.

▼
$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}4\sqrt{1 - y^2} = 4\frac{d}{dy}(1 - y^2)^{1/2} = 4\left(\frac{1}{2}\right)(1 - y^2)^{-1/2}\frac{d}{dy}(1 - y^2) =$$
$$= \frac{2}{(1 - y^2)^{1/2}}(-2y) = \frac{-4y}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

□

4. $w = \dfrac{5}{(3u^2 + 1)^2}$.

▼
$$\frac{dw}{du} = \frac{d}{du}\left[\frac{5}{(3u^2 + 1)^2}\right] = \frac{d}{du}\left[5(3u^2 + 1)^{-2}\right] = 5\frac{d}{du}(3u^2 + 1)^{-2} =$$
$$= 5(-2)(3u^2 + 1)^{-3}\frac{d}{du}(3u^2 + 1) = \frac{-10}{(3u^2 + 1)^3}(6u) = \frac{-60u}{(3u^2 + 1)^3}.$$

□

5. $x = \dfrac{6}{\sqrt[3]{y^5 - 2}}$.

▼
$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\left[\frac{6}{\sqrt[3]{y^5 - 2}}\right] = \frac{d}{dy}6(y^5 - 2)^{-1/3} = 6\frac{d}{dy}(y^5 - 2)^{-1/3} =$$
$$= 6\left(-\frac{1}{3}\right)(y^5 - 2)^{-4/3}\frac{d}{dy}(y^5 - 2) = \frac{-2}{(y^5 - 2)^{4/3}}(5y^4) = \frac{-10y^4}{\sqrt[3]{(y^5 - 2)^4}}.$$

□

6. $y = \sqrt{x + \sqrt{\dfrac{1}{x}}}$.

▼
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}}\frac{d}{dx}\left(x + x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}}\left(\frac{2\sqrt{x^3} - 1}{2\sqrt{x^3}}\right).$$

□

7. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-3x^2}{x}}$.

▼ Escribimos $f(x)=\left(\dfrac{1-3x^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

y de aquí

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-3x^2}{x}}}\,\frac{-6x\times x-(1-3x^2)}{x^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{1-3x^2}}\,\frac{-6x^2-1+3x^2}{x^2}=$$
$$=\frac{-3x^2-1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{1-3x^2}}=-\frac{3x^2+1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{1-3x^2}}\,.$$

□

8. $f(z)=\sqrt{4z^2+\sqrt{27-2z}}$.

▼ Tenemos

$$f'(z)=\frac{1}{2\sqrt{4z^2+\sqrt{27-2z}}}\left[8z+\frac{1}{2\sqrt{27-2z}}(-2)\right]=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{4z^2+\sqrt{27-2z}}}\left(8z-\frac{1}{\sqrt{27-2z}}\right).$$

□

9. $y=\sqrt[3]{\dfrac{4t+1}{2-5t}}$.

▼

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt[3]{\frac{4t+1}{2-5t}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{4t+1}{2-5t}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{4t+1}{2-5t}\right)^{\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{4t+1}{2-5t}\right)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{4t+1}{2-5t}\right)^{-\frac{2}{3}}\left[\frac{(2-5t)\dfrac{d}{dt}(4t+1)-(4t+1)\dfrac{d}{dt}(2-5t)}{(2-5t)^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\frac{(4t+1)^{-\frac{2}{3}}}{(2-5t)^{-\frac{2}{3}}}\left[\frac{(2-5t)4-(4t+1)(-5)}{(2-5t)^2}\right]=$$
$$=\frac{(4t+1)^{-\frac{2}{3}}[4(2-5t)+5(4t+1)]}{3(2-5t)^{\frac{4}{3}}}=\frac{(4t+1)^{-\frac{2}{3}}(8-20t+20t+5)}{3(2-5t)^{\frac{4}{3}}}=$$
$$=\frac{(4t+1)^{-\frac{2}{3}}(13)}{3(2-5t)^{\frac{4}{3}}}=\frac{13}{3(2-5t)^{\frac{4}{3}}(4t+1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Luego

$$\frac{dy}{dt}=\frac{13}{3\sqrt[3]{(2-5t)^4(4t+1)^2}}.$$

□

10. $y = x\sqrt{x + \sqrt{x+1}}$.

▼

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x+\sqrt{x+1}}\right) =$$
$$= x\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{x+\sqrt{x+1}}\frac{d}{dx}(x) =$$
$$= x\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+1}\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x+1}) + \sqrt{x+\sqrt{x+1}}(1) =$$
$$= x\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{x+\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x}{\left(x+\sqrt{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}(x+1)\right] + \sqrt{x+\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left[1+\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(1+0)\right] + \sqrt{x+\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\left[1+\frac{1}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}}\right] + \sqrt{x+\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}\,\frac{2\sqrt{x+1}+1}{2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{x(2\sqrt{x+1}+1)}{4\sqrt{x+1}\sqrt{x+\sqrt{x+1}}} + \sqrt{x+\sqrt{x+1}} =$$
$$= \frac{x(2\sqrt{x+1}+1) + 4\sqrt{x+1}(x+\sqrt{x+1})}{4\sqrt{x+1}\sqrt{x+\sqrt{x+1}}} =$$
$$= \frac{2x\sqrt{x+1} + x + 4x\sqrt{x+1} + 4(x+1)}{4\sqrt{x+1}\sqrt{x+\sqrt{x+1}}} =$$
$$= \frac{6x\sqrt{x+1}+5x+4}{4\sqrt{x+1}\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}.$$

Luego, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x\sqrt{x+1}+5x+4}{4\sqrt{x+1}\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}$. □

11. $x = \dfrac{3y^2}{\sqrt{y^2+1}}$.

▼

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3y^2}{\sqrt{y^2+1}}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{y^2+1}\dfrac{d}{dy}(3y^2) - 3y^2\dfrac{d}{dy}(y^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{y^2+1})^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{y^2+1}(6y) - 3y^2(\frac{1}{2})(y^2+1)^{\frac{1}{2}-1}\dfrac{d}{dy}(y^2+1)}{y^2+1} = \frac{\sqrt{y^2+1}(6y) - 3y^2(\frac{1}{2})(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2y)}{y^2+1} =$$
$$= \frac{6y\sqrt{y^2+1} - 3y^3(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{y^2+1}.$$

Multiplicando y dividiendo por $(y^2+1)^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(y^2+1)^{\frac{1}{2}}[6y(y^2+1)^{\frac{1}{2}} - 3y^3(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}]}{(y^2+1)^{\frac{1}{2}}(y^2+1)} = \frac{6y(y^2+1)^{\frac{2}{2}} - 3y^3(y^2+1)^0}{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= \frac{6y(y^2+1) - 3y^3}{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6y^3+6y-3y^3}{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3y^3+6y}{\sqrt{(y^2+1)^3}} =$$
$$= \frac{3y(y^2+2)}{\sqrt{(y^2+1)^3}}.$$

Entonces, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{3y(y^2+2)}{\sqrt{(y^2+1)^3}}$. □

12. $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}$.

▼ Observamos que

$$y = (x - \sqrt{x^2-1})^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ y' = \frac{-\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{(x-\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{-(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})^2} = \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x-\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}-x^2+1}.$$

□

13. $f(z) = \dfrac{\sqrt{z}+1}{(\sqrt{z}+3)^2}$.

▼ Derivamos

$$f'(z) = \frac{(\sqrt{z}+3)^2\left(\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\right) - (\sqrt{z}+1)2(\sqrt{z}+3)\left(\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\right)}{\left[(\sqrt{z}+3)^2\right]^2} =$$
$$= \frac{(\sqrt{z}+3)\left[(\sqrt{z}+3)\dfrac{1}{2\sqrt{z}} - (\sqrt{z}+1)\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right]}{(\sqrt{z}+3)^4} =$$
$$= \frac{\dfrac{\sqrt{z}+3}{2\sqrt{z}} - \dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}}}{(\sqrt{z}+3)^3} =$$
$$= \frac{\dfrac{\sqrt{z}+3-2(\sqrt{z}+1)}{2\sqrt{z}}}{(\sqrt{z}+3)^3} = \frac{-\sqrt{z}+1}{2\sqrt{z}(\sqrt{z}+3)^3}.$$

□

14. Si $f(w) = \dfrac{\sqrt{w+1}+3}{(w^2+1)^3}$, calcular $f'(1)$.

▼ Derivamos

$$f'(w) = \frac{(w^2+1)^3\left(\dfrac{1}{2\sqrt{w+1}}+0\right) - \left(\sqrt{w+1}+3\right)3(w^2+1)^2 2w}{[(w^2+1)^3]^2} =$$
$$= \frac{(w^2+1)^2\left[(w^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{w+1}} - (\sqrt{w+1}+3)6w\right]}{(w^2+1)^6} =$$
$$= \frac{\dfrac{w^2+1}{2\sqrt{w+1}} - 6w(\sqrt{w+1}+3)}{(w^2+1)^4}$$

y entonces,

$$f'(1) = \frac{\dfrac{1^2+1}{2\sqrt{1+1}} - 6(1)(\sqrt{1+1}+3)}{(1^2+1)^4} = \frac{\dfrac{2}{2\sqrt{2}} - 6(\sqrt{2}+3)}{2^4} =$$
$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} - 18}{16} \approx \frac{0.7071 - 8.4853 - 18}{16} \approx -1.6111\,.$$

□

15. Sean $\Phi(s) = \sqrt{1-\psi(s)}$, $\psi(-2) = -3$ & $\psi'(-2) = 3$, calcule $\Phi'(-2)$.

▼ Observamos que

$$\Phi(s) = [1-\psi(s)]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Luego, por la regla para derivar una función potencia y la regla de la cadena:

$$\Phi'(s) = \frac{d}{ds}[1-\psi(s)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[1-\psi(s)]^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{ds}[1-\psi(s)] = \frac{-\psi'(s)}{2[1-\psi(s)]^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Por lo que

$$\Phi'(-2) = \frac{-\psi'(-2)}{2[1-\psi(-2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{-3}{2\sqrt{1-(-3)}} =$$
$$= \frac{-3}{2\sqrt{4}} = \frac{-3}{2\times 2} = -\frac{3}{4}\,.$$

□

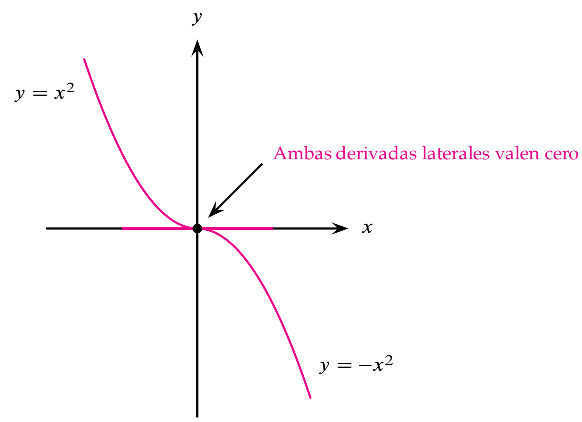
6.3 Derivadas laterales

Ejercicios 6.3.1 *Determinar cuáles de las derivadas laterales $[f'(x_0^-), f'(x_0^+)]$ existen y decidir la derivabilidad de la función f dada en el punto x_0 mencionado.*

1. $x_0 = 0$ & $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 0\,; \\ -x^2 & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$

▼
$$f(x_0) = f(0) = 0 \;\&\; f(x_0+h) = f(0+h) = f(h) = \begin{cases} h^2 & \text{si } h < 0; \\ -h^2 & \text{si } h > 0; \end{cases}$$
$$f'(x_0^-) = f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0;$$
$$f'(x_0^+) = f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0}(-h) = 0.$$

Entonces $f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por lo tanto, f es derivable en x_0 & $f'(0) = 0$.

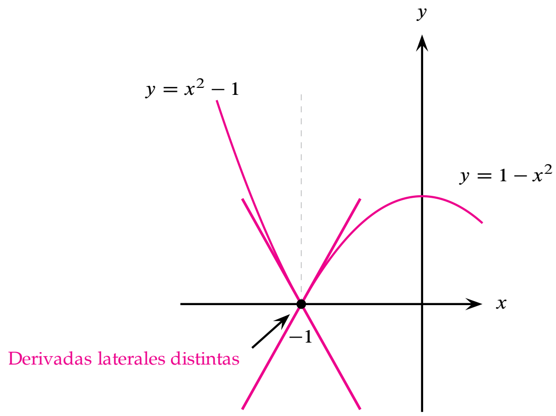


□

2. $x_0 = -1$ & $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < -1\,; \\ 1-x^2 & \text{si } -1 \le x \le 1\,. \end{cases}$

▼
$$f(x_0) = f(-1) = 1-(-1)^2 = 1-1 = 0;$$
$$f(x_0+h) = f(-1+h) = \begin{cases} (h-1)^2-1 & \text{si } h-1 < -1 \\ 1-(h-1)^2 & \text{si } h-1 > -1 \end{cases} = \begin{cases} h^2-2h & \text{si } h < 0; \\ 2h-h^2 & \text{si } h > 0; \end{cases}$$
$$f'(x_0^-) = f'(-1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-2h-0}{h} = \lim_{h\to 0}(h-2) = -2;$$
$$f'(x_0^+) = f'(-1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h-h^2-0}{h} = \lim_{h\to 0}(2-h) = 2.$$

Entonces $f'(-1^-) = -2 \ne f'(-1^+) = 2$. Por lo tanto, $f'(-1)$ no existe. Esto es, f no es derivable en $x_0 = -1$.



□

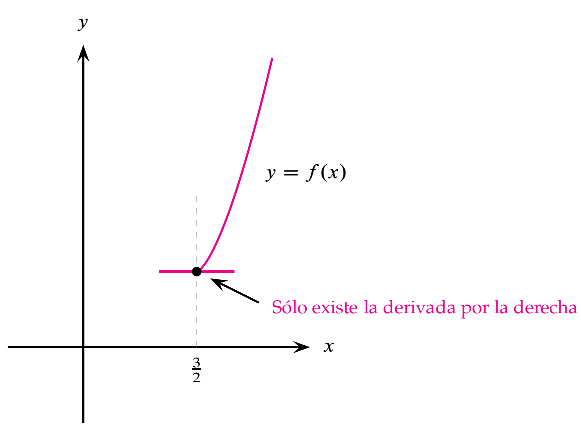
3. $x_0 = \dfrac{3}{2}$ & $f(x) = (2x-3)^{3/2} + 1$.

▼
$$f'(x) = \frac{3}{2}(2x-3)^{1/2}(2) + 0 = 3(2x-3)^{1/2} = 3\sqrt{2x-3};$$
$f'(x) = 3\sqrt{2x-3}$ existe cuando $2x - 3 \geq 0$, es decir, para $x \in D_f = \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

Esto es, $f'(x)$ existe cuando $x \geq \dfrac{3}{2}$. Entonces,

$$f'(x_0^-) = f'(\tfrac{3}{2}^-) \text{ no existe, ;}$$
$$f'(x_0^+) = f'(\tfrac{3}{2}^+) = 3\sqrt{2(\tfrac{3}{2}) - 3} = 3(0) = 0.$$

Por lo tanto, $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$ no existe. Esto es, f no es derivable en $x_0 = \dfrac{3}{2}$.



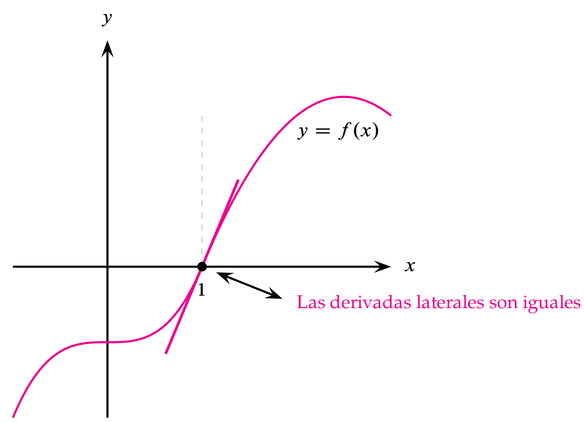
□

4. $x_0 = 1$ & $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1\,; \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{si } x \geq 1\,. \end{cases}$

▼

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= f(1) = -1^2 + 5(1) - 4 = -1 + 5 - 4 = 0;\\
f(x_0+h) &= f(1+h) = \begin{cases} (1+h)^3 - 1 & \text{si } 1+h < 1;\\ -(1+h)^2 + 5(1+h) - 4 & \text{si } 1+h > 1; \end{cases} =\\
&= \begin{cases} 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1 & \text{si } h < 0;\\ -1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 4 & \text{si } h > 0; \end{cases} =\\
&= \begin{cases} 3h + 3h^2 + h^3 & \text{si } h < 0;\\ 3h - h^2 & \text{si } h > 0. \end{cases}\\
f'(x_0^-) &= f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0^-} (3 + 3h + h^2) = 3;\\
f'(x_0^+) &= f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h - h^2}{h} \lim_{h\to 0^+} (3 - h) = 3.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, f es derivable en $x_0 = 1$; además $f'(1) = 3$.



□

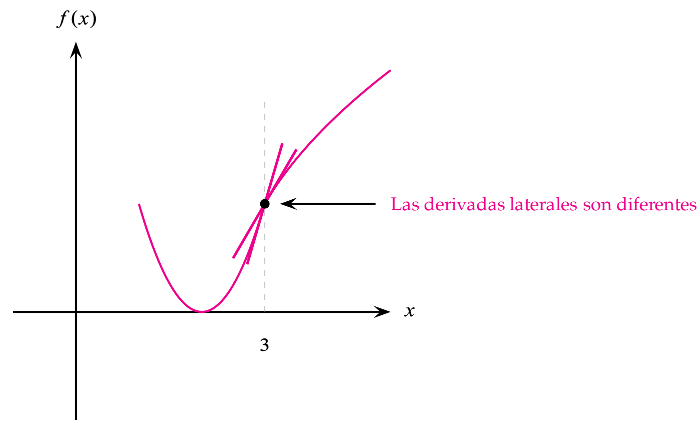
5. $x_0 = 3$ & $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{si } x \le 3\,;\\ \sqrt{2x-5} & \text{si } x > 3\,. \end{cases}$

▼

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &= f(3) = (3-2)^2 = 1^2 = 1;\\
f(x_0+h) &= f(3+h) = \begin{cases} [(3+h) - 2]^2 & \text{si } 3+h < 3\\ \sqrt{2(3+h) - 5} & \text{si } 3+h > 3 \end{cases} = \begin{cases} [(3+h) - 2]^2 & \text{si } h < 0;\\ \sqrt{2(3+h) - 5} & \text{si } h > 0; \end{cases} =\\
&= \begin{cases} (1+h)^2 & \text{si } h < 0\\ \sqrt{1+2h} & \text{si } h > 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 + 2h + h^2 & \text{si } h < 0;\\ \sqrt{1+2h} & \text{si } h > 0; \end{cases}\\
f'(x_0^-) &= f'(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} (2 + h) = 2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0^+) = f'(3^+) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2h}-1}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{(\sqrt{(1+2h}-1)(\sqrt{(1+2h}+1)}{h(\sqrt{1+2h}+1)} = \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{1+2h-1}{h(\sqrt{1+2h}+1)} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{1+2h}+1} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+2(0)}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

Concluimos que f no es derivable en $x_0 = 3$.



La función es continua en $x_0 = 3$, pero no es derivable es ese punto. □

6.4 Derivadas infinitas

Ejercicios 6.4.1

Para las siguientes funciones, encontrar dónde la derivada se hace infinita y determinar si es $+\infty$ o bien $-\infty$.

1. $f(x) = \sqrt{x-4}\,.$

▼

$$
f(x) = \sqrt{x-4} = (x-4)^{1/2} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{2}(x-4)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x-4}}.
$$

Entonces,

$f'(x) \in \mathbb{R}$ para cada $x > 4$;
$f'(x)$ no existe cuando $x \le 4$.

La única posibilidad para una derivada infinita es $f'(4^+)$.

$$
f'(4^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{(4+h)-4}-\sqrt{4-4}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}.
$$

Puesto que $h \to 0^+ \;\Rightarrow\; h > 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{h^2} = |\,h\,| = h$, entonces:

$$
f'(4^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h^2}} = \lim_{h\to 0^+}\sqrt{\frac{h}{h^2}} = \lim_{h\to 0^+}\sqrt{\frac{1}{h}} = +\infty.
$$

Por lo tanto, $f'(4^+) = +\infty$. □

2. $g(t) = t^{3/5}$.

▼ $g(t) = t^{3/5} \Rightarrow g'(t) = \dfrac{3}{5}t^{-2/5} = \dfrac{3}{5t^{2/5}} = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{t^2}}$.

Observamos que $g'(t) \in \mathbb{R}$ para cada $t \neq 0$, por lo cual la única posibilidad para una derivada infinita está en $t = 0$.

También $\sqrt[5]{t^2} \to 0^+$, cuando $t \to 0^-$ y cuando $t \to 0^+$:

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{t^{3/5} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^{2/5}} = +\infty.$$

Por lo tanto, $g'(0^-) = +\infty$ & $g'(0^+) = +\infty$. □

3. $\phi(y) = (y - 2)^{2/5} + 1$.

▼ $\phi(y) = (y - 2)^{2/5} + 1 \Rightarrow \phi'(y) = \dfrac{2}{5}(y - 2)^{-3/5} = \dfrac{2}{5(y - 2)^{3/5}}$.

Encontramos que $\phi'(y) \in \mathbb{R}$ para cada $y \neq 2$, por lo que la única posibilidad para derivadas infinitas está en $y = 2$.

$$y \to 2^- \Rightarrow y < 2 \Rightarrow y - 2 < 0 \Rightarrow (y - 2)^3 < 0 \Rightarrow \sqrt[5]{(y - 2)^3} < 0 \Rightarrow \sqrt[5]{(y - 2)^3} \to 0^- \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2}{5(y - 2)^{3/5}} \to -\infty \Rightarrow \phi'(2^-) = -\infty;$$
$$y \to 2^+ \Rightarrow y > 2 \Rightarrow y - 2 > 0 \Rightarrow (y - 2)^3 > 0 \Rightarrow \sqrt[5]{(y - 2)^3} > 0 \Rightarrow \sqrt[5]{(y - 2)^3} \to 0^+ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2}{5(y - 2)^{3/5}} \to +\infty \Rightarrow \phi'(2^+) = +\infty.$$

Por lo tanto, $\phi'(2^-) = -\infty$ & $\phi'(2^+) = +\infty$. □

4. $w = (1 - u)^{2/3} + 1$.

▼ $w = (1 - u)^{2/3} + 1 = f(u) \Rightarrow f'(u) = \dfrac{2}{3}(1 - u)^{-1/3}(-1) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{1 - u}}$.

Vemos que $f'(u) \in \mathbb{R}$ para cada $u \neq 1$, por lo cual la única posibilidad para derivadas infinitas está en $u = 1$.

$$u \to 1^- \Rightarrow u < 1 \Rightarrow 1 - u > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1 - u} > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1 - u} \to 0^+ \Rightarrow \frac{-2}{3\sqrt[3]{1 - u}} < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-2}{3\sqrt[3]{1 - u}} \to -\infty \Rightarrow f'(1^-) = -\infty.$$
$$u \to 1^+ \Rightarrow u > 1 \Rightarrow 1 - u < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1 - u} < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1 - u} \to 0^- \Rightarrow \frac{-2}{3\sqrt[3]{1 - u}} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{-2}{3\sqrt[3]{1 - u}} \to +\infty \Rightarrow f'(1^+) = +\infty.$$

□

5. $y = 1 + \sqrt{3 - 2x}$.

▼
$$y = 1 + \sqrt{3 - 2x} = g(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(3 - 2x)^{-1/2}(-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{(3 - 2x)^{1/2}} = \frac{-1}{\sqrt{3 - 2x}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(x) \in \mathbb{R} \text{ para cada } x < \frac{3}{2} \text{ \& } g'(x) \text{ no existe cuando } x > \frac{3}{2}.$$

La única posibilidad para una derivada infinita es $g'\left(\frac{3}{2}^-\right)$.

$$g'\left(\frac{3}{2}^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g\left(\frac{3}{2}+h\right) - g\left(\frac{3}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\left(1+\sqrt{3-2\left(\frac{3}{2}+h\right)}\right) - (1+0)}{h}.$$

Ya que $h \to 0^- \;\Rightarrow\; h < 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{h^2} = |\,h\,| = -h \;\Rightarrow\; h = -\sqrt{h^2} \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; g'\left(\frac{3}{2}^-\right) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-2h}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-2h}}{-\sqrt{h^2}} =$$

$$= -\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-2h}}{\sqrt{h^2}} = -\lim_{h\to 0^-} \sqrt{\frac{-2h}{h^2}} = -\lim_{h\to 0^-} \sqrt{\frac{-2}{h}} =$$

$$= -\lim_{h\to 0^-} \sqrt{-\frac{2}{h}} = -\infty.$$

Por lo tanto, $g'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\infty$. □

6.5 Derivadas de orden superior

Ejercicios 6.5.1 *Calcular la segunda derivada de cada una de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = 2x^6 - 15x^4 - 1$.

▼

$$f(x) = 2x^6 - 15x^4 - 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 12x^5 - 60x^3 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f''(x) = 60x^4 - 180x^2 = 60x^2(x^2 - 3) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f''(x) = 60x^2(x^2 - 3).$$

□

2. $g(x) = (3x^2 - 1)^5$.

▼

$$g(x) = (3x^2 - 1)^5 \;\Rightarrow\; g'(x) = 5(3x^2 - 1)^4(6x) = 30x(3x^2 - 1)^4 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; g''(x) = 30\left[(x)4(3x^2 - 1)^3(6x) + (3x^2 - 1)^4(1)\right] =$$
$$= 30(3x^2 - 1)^3\left[24x^2 + (3x^2 - 1)\right] = 30(3x^2 - 1)^3[27x^2 - 1] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; g''(x) = 30(3x^2 - 1)^3(27x^2 - 1).$$

□

3. $y = \dfrac{2u+1}{3u-2}$.

▼

$$y = \frac{2u+1}{3u-2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{du} = \frac{(3u-2)(2) - (2u+1)3}{(3u-2)^2} = \frac{6u - 4 - 6u - 3}{(3u-2)^2};$$
$$\frac{dy}{du} = \frac{-7}{(3u-2)^2} = -7(3u-2)^{-2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{d^2y}{du^2} = -7(-2)(3u-2)^{-3}(3) = 42(3u-2)^{-3} = \frac{42}{(3u-2)^3}.$$

□

4. $w = \dfrac{t^2}{t^2 - 4}$.

▼
$$w = \frac{t^2}{t^2-4} \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{(t^2-4)2t - t^2(2t)}{(t^2-4)^2} = \frac{-8t}{(t^2-4)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{(t^2-4)^2(-8) - (-8t)2(t^2-4)2t}{(t^2-4)^4} = \frac{-8(t^2-4)^2 + 32t^2(t^2-4)}{(t^2-4)^4};$$
$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{8(t^2-4)[-(t^2-4)+4t^2]}{(t^2-4)^4} = \frac{8[-t^2+4+4t^2]}{(t^2-4)^3};$$
$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{8(3t^2+4)}{(t^2-4)^3}.$$

□

5. $u = \dfrac{3y}{y^2 + 1}$.

▼
$$u = \frac{3y}{y^2+1} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{(y^2+1)3 - 3y(2y)}{(y^2+1)^2} = \frac{3-3y^2}{(y^2+1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{(y^2+1)^2(-6y) - 3(1-y^2)2(y^2+1)2y}{(y^2+1)^4} =$$
$$= \frac{-6y(y^2+1)[y^2+1+2-2y^2]}{(y^2+1)^4} = \frac{-6y(3-y^2)}{(y^2+1)^3};$$
$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{6y(y^2-3)}{(y^2+1)^3} = \frac{6y(y-\sqrt{3})(y+\sqrt{3})}{(y^2+1)^3}.$$

□

6. $y = x^2 + \dfrac{8}{x}$.

▼
$$y = x^2 + \frac{8}{x} = x^2 + 8x^{-1} \Rightarrow y' = 2x - 8x^{-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'' = 2 + 16x^{-3} = 2 + \frac{16}{x^3} \Rightarrow y'' = 2 + \frac{16}{x^3}.$$

□

7. $z = (3 - t^2)^{3/2}$.

▼
$$z = (3-t^2)^{3/2} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{3}{2}(3-t^2)^{1/2}(-2t) = -3t(3-t^2)^{1/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = (-3t)\frac{1}{2}(3-t^2)^{-1/2}(-2t) + (3-t^2)^{1/2}(-3) =$$
$$= 3t^2(3-t^2)^{-1/2} - 3(3-t^2)^{1/2} = \frac{3t^2}{(3-t^2)^{1/2}} - 3(3-t^2)^{1/2} =$$
$$= \frac{3t^2 - 3(3-t^2)}{(3-t^2)^{1/2}} = \frac{3t^2 - 9 + 3t^2}{\sqrt{3-t^2}} = \frac{6t^2-9}{\sqrt{3-t^2}};$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{3(2t^2-3)}{\sqrt{3-t^2}}.$$

□

8. $w = \left(\dfrac{u}{u+1}\right)^{-4}$.

▼

$$w = \left(\frac{u}{u+1}\right)^{-4} = \frac{u^{-4}}{(u+1)^{-4}} = \frac{(u+1)^4}{u^4} = \left(\frac{u+1}{u}\right)^4 = \left(1+\frac{1}{u}\right)^4;$$

$$w = (1+u^{-1})^4 \Rightarrow \frac{dw}{du} = 4(1+u^{-1})^3(-u^{-2}) = -4u^{-2}(1+u^{-1})^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2w}{du^2} = (-4u^{-2})3(1+u^{-1})^2(-u^{-2}) + (1+u^{-1})^3(-4)(-2u^{-3}) =$$

$$= 12u^{-4}(1+u^{-1})^2 + 8u^{-3}(1+u^{-1})^3 =$$

$$= \frac{12(1+u^{-1})^2}{u^4} + \frac{8(1+u^{-1})^3}{u^3} = \frac{12(1+u^{-1})^2 + 8u(1+u^{-1})^3}{u^4} =$$

$$= \frac{4(1+u^{-1})^2}{u^4}\left[3+2u(1+u^{-1})\right] = \frac{4(1+u^{-1})^2}{u^4}(5+2u) = \frac{4}{u^4}\left(1+\frac{1}{u}\right)^2(2u+5);$$

$$\frac{d^2w}{du^2} = \frac{4}{u^4}\left(\frac{u+1}{u}\right)^2(2u+5) = \frac{4}{u^6}(u+1)^2(2u+5).$$

□

9. $x = \dfrac{1}{y^2-y+1}$.

▼

$$x = \frac{1}{y^2-y+1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{(y^2-y+1)0 - 1(2y-1)}{(y^2-y+1)^2} = \frac{1-2y}{(y^2-y+1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(y^2-y+1)^2(-2) - (1-2y)2(y^2-y+1)(2y-1)}{(y^2-y+1)^4} =$$

$$= \frac{(-2)(y^2-y+1)[(y^2-y+1)+(1-2y)(2y-1)]}{(y^2-y+1)^4} =$$

$$= \frac{-2[y^2-y+1-4y^2+4y-1]}{(y^2-y+1)^3} = \frac{-2(-3y^2+3y)}{(y^2-y+1)^3} = \frac{6(y^2-y)}{(y^2-y+1)^3};$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{6y(y-1)}{(y^2-y+1)^3}.$$

O también

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(y^2-y+1)^{-1}}{dy} = -(y^2-y+1)^{-2}(2y-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = 2(y^2-y+1)^{-3}(2y-1)^2 - (y^2-y+1)^{-2}2 = \frac{2(2y-1)^2}{(y^2-y+1)^3} - \frac{2}{(y^2-y+1)^2} =$$

$$= \frac{2(2y-1)^2 - 2(y^2-y+1)}{(y^2-y+1)^3} = \frac{6y^2-6y}{(y^2-y+1)^3} = \frac{6y(y-1)}{(y^2-y+1)^3}.$$

□

10. $y = x\sqrt{1-x^2}$.

▼

$$
\begin{aligned}
& y = x\sqrt{1-x^2} = x(1-x^2)^{1/2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow y' = x(\tfrac{1}{2})(1-x^2)^{-1/2}(-2x) + (1-x^2)^{1/2}(1) = -x^2(1-x^2)^{-1/2} + (1-x^2)^{1/2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow y'' = (-x^2)(-\tfrac{1}{2})(1-x^2)^{-3/2}(-2x) + (1-x^2)^{-1/2}(-2x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) \Rightarrow \\
& \Rightarrow y'' = \frac{-x^3}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{3x}{(1-x^2)^{1/2}} = \frac{-x^3-3x(1-x^2)}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{-x^3-3x+3x^3}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{3/2}} \Rightarrow \\
& \Rightarrow y'' = \frac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \text{si } x \in (-1,1)\,.
\end{aligned}
$$

□

Determinar la n-ésima derivada de cada una de las siguientes funciones, para el número n dado:

11. $n = 4$ & $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$.

▼

$$
\begin{aligned}
& f(x) = \frac{1}{2x+1} = (2x+1)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1(2x+1)^{-2}(2) = -2(2x+1)^{-2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow f''(x) = -2(-2)(2x+1)^{-3}(2) = 2^3(2x+1)^{-3} \Rightarrow \\
& \Rightarrow f^{(3)}(x) = 2^3(-3)(2x+1)^{-4}(2) = -3(2)^4(2x+1)^{-4} \Rightarrow \\
& \Rightarrow f^{(4)}(x) = -3(2)^4(-4)(2x+1)^{-5}(2) = 3(2)^4(2)^2(2x+1)^{-5}(2) \Rightarrow \\
& \Rightarrow f^{(4)}(x) = 3(2)^7(2x+1)^{-5} = \frac{3(2)^7}{(2x+1)^5} = 12\left(\frac{2}{2x+1}\right)^5 .
\end{aligned}
$$

□

12. $n = 5$ & $g(t) = t^3 + \dfrac{2}{t}$.

▼

$$
\begin{aligned}
& g(t) = t^3 + \frac{2}{t} = t^3 + 2t^{-1} \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 2t^{-2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow g''(t) = 6t + 4t^{-3} \Rightarrow g^{(3)}(t) = 6 - 12t^{-4} \Rightarrow g^{(4)}(t) = 0 + 48t^{-5} \Rightarrow \\
& \Rightarrow g^{(5)}(t) = (48)(-5t^{-6}) = -240t^{-6} = -\frac{240}{t^6}.
\end{aligned}
$$

□

13. $n = 4$ & $w = \dfrac{au-b}{au+b}$ (con a, b constantes) .

▼

$$
\begin{aligned}
& w = \frac{au-b}{au+b} \Rightarrow \frac{dw}{du} = \frac{(au+b)a-(au-b)a}{(au+b)^2} = \frac{2ab}{(au+b)^2} = 2ab(au+b)^{-2} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{d^2w}{du^2} = 2ab(-2)(au+b)^{-3}a = -2^2a^2b(au+b)^{-3} \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{d^3w}{du^3} = -2^2a^2b(-3)(au+b)^{-4}a = 3(2^2)a^3b(au+b)^{-4} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \frac{d^4w}{du^4} = 3(2^2)a^3b(-4)(au+b)^{-5}a = 3(2^2)a^4b(-2^2)(au+b)^{-5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^4w}{du^4} = -3(2^4)a^4b(au+b)^{-5} = \frac{-3(2)^4a^4b}{(au+b)^5}.$$

□

14. $n = 3$ & $x = (y^2+1)^5$.

▼

$$x = (y^2+1)^5 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 5(y^2+1)^4 2y = 10y(y^2+1)^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = 10[(y)4(y^2+1)^3 2y + (y^2+1)^4(1)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = 10(y^2+1)^3[8y^2+(y^2+1)] = 10(y^2+1)^3(9y^2+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^3x}{dy^3} = 10[(y^2+1)^3(18y) + (9y^2+1)3(y^2+1)^2 2y] =$$
$$= 10(y^2+1)^2(6y)[3(y^2+1)+(9y^2+1)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^3x}{dy^3} = 60y(y^2+1)^2(12y^2+4) = 240y(y^2+1)^2(3y^2+1).$$

□

15. $n = 3$ & $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

▼

$$y = \frac{x^2}{x^2-1} \Rightarrow y' = \frac{(x^2-1)2x - x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y''(x) = \frac{(x^2-1)^2(-2) - (-2x)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-2(x^2-1)^2 + 8x^2(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y''(x) = \frac{2(x^2-1)[-(x^2-1)+4x^2]}{(x^2-1)^4} = \frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^{(3)} = \frac{(x^2-1)^3 2(6x) - 2(3x^2+1)3(x^2-1)^2(2x)}{(x^2-1)^6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^{(3)} = \frac{12x(x^2-1)^3 - 12x(3x^2+1)(x^2-1)^2}{(x^2-1)^6} = \frac{12x(x^2-1)^2(x^2-1-3x^2-1)}{(x^2-1)^6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^{(3)} = \frac{12x(-2x^2-2)}{(x^2-1)^4} = \frac{-24x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}.$$

□

6.6 Derivación implícita

Ejercicios 6.6.1

1. Dada la curva definida por $y^3 + 3y^2 = x^4 - 3x^2$.

   a. Obtener la ecuación de su recta tangente en el punto $(-2, 1)$.

b. Calcular las abscisas de los puntos sobre la curva con rectas tangentes horizontales.

▼

a. Efectivamente el punto $(-2, 1)$ pertenece a la curva, pues sus coordenadas satisfacen a la ecuación:

$$1^3 + 3 \times 1^2 = (-2)^4 - 3(-2)^2 \Leftrightarrow 1 + 3 = 16 - 3(4) \Leftrightarrow 4 = 16 - 12.$$

Suponemos que $y = \phi(x)$ y calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(y^3 + 3y^2) = \frac{d}{dx}(x^4 - 3x^2);$$
$$\frac{d}{dx}(y^3) + 3\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^4) - 3\frac{d}{dx}(x^2).$$

Aplicando la regla de la potencia y la regla de la cadena:

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 3\left(2y\frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 - 3(2x);$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} + 6y\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x;$$
$$(3y^2 + 6y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x;$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6x}{3y^2 + 6y}.$$

Calculamos la pendiente m de la recta tangente evaluando $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $P(-2, 1)$:

$$m = \frac{4(-2)^3 - 6(-2)}{3(1)^2 + 6(1)} = \frac{4(-8) + 12}{3 + 6} = \frac{-32 + 12}{9} = \frac{-20}{9} \Rightarrow m = -\frac{20}{9}.$$

Usando $y - y_1 = m(x - x_1)$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = -\frac{20}{9}[x - (-2)];$$
$$y - 1 = -\frac{20}{9}(x + 2);$$
$$y = -\frac{20}{9}x - \frac{40}{9} + 1;$$
$$y = -\frac{20}{9}x - \frac{31}{9}.$$

b. En los puntos $Q(x, y)$, donde la curva tiene rectas tangentes horizontales, se cumple que $m = 0$, o sea que, $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6x}{3y^2 + 6y} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= 0 \\ 2x^2 - 3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ 2x^2 &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ x^2 &= \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ x &= \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x &= 0; \\ x &= \sqrt{\dfrac{3}{2}}; \\ x &= -\sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{cases}$$

Hallamos que son 3 puntos donde esta curva tiene rectas tangentes horizontales y que las abscisas de dichos puntos son:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}},\, x_2 = 0 \;\&\, x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

□

2. Dada la curva $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$.

   a. Obtener $\dfrac{dy}{dx} = y'$.

   b. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(3, 1)$.

▼

a. Suponemos que $y = \phi(x)$ y calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[2(x^2 + y^2)^2] &= \frac{d}{dx}[25(x^2 - y^2)];\\
2\frac{d}{dx}(x^2 + y^2)^2 &= 25\frac{d}{dx}(x^2 - y^2);\\
2(2)(x^2 + y^2)^{2-1}\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= 25\frac{d}{dx}(x^2 - y^2);\\
4(x^2 + y^2)\left(\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2\right) &= 25\left(\frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}y^2\right);\\
4(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) &= 25\left(2x - 2y\frac{dy}{dx}\right);\\
8x(x^2 + y^2) + 8y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} &= 50x - 50y\frac{dy}{dx};\\
8y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + 50y\frac{dy}{dx} &= 50x - 8x(x^2 + y^2);\\
\left[8y(x^2 + y^2) + 50y\right]\frac{dy}{dx} &= 50x - 8x(x^2 + y^2);\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{50x - 8x(x^2 + y^2)}{8y(x^2 + y^2) + 50y} =\\
&= \frac{2x\left[25 - 4(x^2 + y^2)\right]}{2y\left[4(x^2 + y^2) + 25\right]} =\\
&= \frac{x\left[25 - 4(x^2 + y^2)\right]}{y\left[4(x^2 + y^2) + 25\right]}.
\end{aligned}$$

b. Efectivamente el punto $P(3, 1)$ está sobre la curva $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, pues sus coordenadas la satisfacen:

$$2(3^2 + 1^2)^2 = 25(3^2 - 1^2) \;\Leftrightarrow\; 2(9 + 1)^2 = 25(9 - 1) \;\Leftrightarrow\; 2 \times 10^2 = 25 \times 8 \;\Leftrightarrow\; 2 \times 100 = 200.$$

Valuamos $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $P(3, 1)$ para tener la pendiente m de la recta tangente:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{3\left[25 - 4(3^2 + 1^2)\right]}{1\left[4(3^2 + 1^2) + 25\right]} = \frac{3\left[25 - 4(9 + 1)\right]}{4(9 + 1) + 25} = \frac{3(25 - 36 - 4)}{36 + 4 + 25} =\\
&= \frac{3(-15)}{65} = \frac{3(-3)}{13} = -\frac{9}{13}.
\end{aligned}$$

Usando $y - y_1 = m(x - x_1)$, la ecuación de la recta tangente es:

$$\begin{aligned} y - 1 &= -\frac{9}{13}(x-3); \\ y - 1 &= -\frac{9}{13}x + \frac{27}{13}; \\ y &= -\frac{9}{13}x + \frac{27}{13} + 1; \\ y &= -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}. \end{aligned}$$

□

3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $\dfrac{4y^2 - 3x^2y}{3 - 4x^2} = -1$ en el punto $(-1, 1)$.

▼ Observamos primero que el punto $(-1, 1)$ sí pertenece a la curva, pues sus coordenadas $x = -1$ & $y = 1$ satisfacen la ecuación

$$\frac{4 \times 1^2 - 3(-1)^2 \times 1}{3 - 4(-1)^2} = \frac{4 \times 1 - 3 \times 1 \times 1}{3 - 4 \times 1} = \frac{4-3}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente, se deriva implícitamente con respecto a x (pensando que y es función de x):

$$\frac{4y^2 - 3x^2y}{3 - 4x^2} = -1 \;\Rightarrow\; 4y^2 - 3x^2y = -3 + 4x^2, (\text{ si } 3 - 4x^2 \neq 0, \text{ o sea, } x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2});$$

obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(4y^2 - 3x^2y) = \frac{d}{dx}(-3 + 4x^2) \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; 8y \times y' - 6xy - 3x^2y' = 8x. \end{aligned}$$

y de aquí despejamos y'

$$(8y - 3x^2)y' = 8x + 6xy \;\Rightarrow\; y' = \frac{8x + 6xy}{8y - 3x^2}.$$

En el punto $(-1, 1)$, la pendiente es:

$$m = y'(-1, 1) = \frac{8(-1) + 6(-1) \times 1}{8 \times 1 - 3(-1)^2} = \frac{-8-6}{8-3} = \frac{-14}{5} = -\frac{14}{5}.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es

$$\begin{aligned} &y - 1 = -\frac{14}{5}(x+1) \;\Rightarrow\; y = -\frac{14}{5}x - \frac{14}{5} + 1 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; y = -\frac{14}{5}x - \frac{14-5}{5} \;\Rightarrow\; y = -\frac{14}{5}x - \frac{9}{5}. \end{aligned}$$

□

4. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $5x^2y + 8x^4y^2 - 3(y^5 + x^3)^2 = 1$ en el punto $(1, 1)$.

▼ El punto estará sobre la curva si sus coordenadas $x = 1$ & $y = 1$ satisfacen a la ecuación de la curva. Veámoslo; ponemos 1 en lugar de x & y, con lo cual tenemos:

$$5(1)^2 \times 1 + 8(1)^4(1)^2 - 3[(1)^5 + (1)^3]^2 = 5 + 8 - 3 \times 2^2 = 13 - 3 \times 4 = 13 - 12 = 1$$

y verificamos que el punto efectivamente está sobre la curva.

Hallemos ahora la pendiente de la tangente derivando implícitamente con respecto a x

$$10xy + 5x^2y' + 32x^3y^2 + 16x^4yy' - 6(y^5 + x^3)(5y^4y' + 3x^2) = 0.$$

Trasponiendo términos y factorizando y':

$$y'(5x^2 + 16x^4y - 30y^9 - 30x^3y^4) = -10xy - 32x^3y^2 + 18x^2y^5 + 18x^5;$$

despejando y'

$$y' = \frac{-10xy - 32x^3y^2 + 18x^2y^5 + 18x^5}{5x^2 + 16x^4y - 30y^9 - 30x^3y^4};$$

y ahora en el punto $(1, 1)$:

$$y'(1, 1) = \frac{-10 - 32 + 18 + 18}{5 + 16 - 30 - 30} = \frac{-6}{-39} = \frac{2}{13}$$

es la pendiente de la recta tangente; su ecuación entonces es:

$$y - 1 = \frac{2}{13}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{13}x - \frac{2}{13} + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{13}x + \frac{11}{13}.$$

□

5. Obtenga las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida implícitamente por $(xy^2 + 9)^2 = (y + 2)^{4/3}$ en el punto $(0, 25)$.

▼ Efectivamente el punto $(0, 25)$ pertenece a la curva, pues sus coordenadas satisfacen a la ecuación

$$(0 + 9)^2 = (25 + 2)^{4/3}, \text{ pues } 81 = (\sqrt[3]{27})^4 \Leftrightarrow 81 = 3^4.$$

Calculamos la pendiente de la tangente a la curva derivando con respecto a x:

$$2(xy^2 + 9)(y^2 + 2xyy') = \frac{4}{3}(y + 2)^{1/3}y'.$$

Trasponiendo términos,

$$2(xy^2 + 9)2xyy' - \frac{4}{3}(y + 2)^{1/3}y' = -2xy^4 - 18y^2.$$

Factorizando

$$y'\left[4xy(xy^2 + 9) - \frac{4}{3}(y + 2)^{1/3}\right] = -2(xy^2 + 9)y^2;$$

luego, por último, despejando y'

$$y' = \frac{-2(xy^2 + 9)y^2}{4xy(xy^2 + 9) - \frac{4}{3}(y + 2)^{1/3}};$$

y en el punto $(0, 25)$, la pendiente de la tangente es

$$y'(0, 25) = \frac{-18 \times 25^2}{-\frac{4}{3}(25 + 2)^{1/3}} = \frac{18 \times 625}{4} = \frac{5\,625}{2};$$

y la pendiente de la normal es $-\dfrac{2}{5\,625}$, por lo que las respectivas ecuaciones son:

$$y - 25 = \frac{5\,625}{2}x \Rightarrow y = \frac{5\,625}{2}x + 25 \text{ es la ecuación de la tangente;}$$

$$y - 25 = -\frac{2}{5\,625}x \Rightarrow y = -\frac{2}{5\,625}x + 25 \text{ es la ecuación de la normal.}$$

□

6. Encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto $P(1, 1)$ de la Lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = 4xy .$$

▼ Efectivamente el punto $P(1, 1)$ está sobre la Lemniscata, pues sus coordenadas la satisfacen:

$$(1^2 + 1^2)^2 = 4 \times 1 \times 1 \;\Rightarrow\; 4 = 4.$$

Calculemos la pendiente de la recta tangente derivando implícitamente con respecto a x:

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 4y + 4xy'.$$

Trasponiendo términos, para despejar y'

$$4y(x^2 + y^2)y' - 4xy' = 4y - 4x(x^2 + y^2).$$

Dividiendo toda la ecuación entre 4 y factorizando y':

$$[y(x^2 + y^2) - x]y' = y - x(x^2 + y^2).$$

Por lo que:

$$y' = \frac{y - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) - x}.$$

Y en el punto $P(1, 1)$, la pendiente es:

$$m = y'(1, 1) = \frac{1 - 1(1^2 + 1^2)}{1(1^2 + 1^2) - 1} = \frac{1 - 1(1 + 1)}{1(1 + 1) - 1} = \frac{1 - 1 \times 2}{1 \times 2 - 1} = \frac{1 - 2}{2 - 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

□

7. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$, donde la recta tangente es horizontal.

▼ Suponiendo que la curva es la gráfica de una función derivable $y = f(x)$, la cual está definida implícitamente, su derivada está dada por

$$2xy^2 + 2x^2yy' + y + xy' = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; (2x^2y + x)y' = -(2xy^2 + y) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y' = -\frac{(2xy + 1)y}{2x^2y + x} = -\frac{(2xy + 1)y}{(2xy + 1)x} ;$$
$$y' = 0 \text{ si } y = 0 \text{ o bien } 2xy + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{1}{2x}, x \neq 0 .$$

Ahora bien, $y = 0$ no corta a la curva dada, pues no existe x tal que $x^2 \times 0^2 + x \times 0 = 2$.

Veamos ahora si hay puntos de la curva tales que $y = -\dfrac{1}{2x}$; resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2y^2 + xy = 2; \\ y = -\dfrac{1}{2x}; \end{cases}$$

sustituyendo el valor de $y = -\dfrac{1}{2x}$ en la primera ecuación (la que determina a la curva):

$$\frac{x^2}{4x^2} + x\left(-\frac{1}{2x}\right) = 2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2 .$$

Por lo que tal curva no tiene tangente horizontal.

Este resultado lo podemos comprobar pues podemos hallar explícitamente la función $y = f(x)$.

Despejando y de la ecuación:

$$x^2y^2 + xy - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 8x^2}}{2x^2} = \frac{-x \pm 3x}{2x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{x} = x^{-1} & (x \neq 0) \\ -\dfrac{2}{x} = -2x^{-1}\,. \end{cases}$$

Entonces las derivadas de cada una de las funciones $y = x^{-1}$ & $y = -2x^{-1}$, respectivamente, son:

$y_1' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$ & $y_2' = \dfrac{2}{x^2}$ nunca son igual a 0, por lo que no tiene tangentes horizontales. □

8. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ en la ecuación $y^2(x^2 - 1)^2 + 3(2y^3 - 1)^2 = 0$.

▼ Derivemos implícitamente con respecto a x:

$$2yy'(x^2 - 1)^2 + 2y^2(x^2 - 1)2x + 6(2y^3 - 1) \times 6y^2y' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [2y(x^2 - 1)^2 + 36y^2(2y^3 - 1)]y' = 4xy^2(1 - x^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \frac{4xy^2(1 - x^2)}{2y(x^2 - 1)^2 + 36y^2(2y^3 - 1)} = \frac{2xy(1 - x^2)}{(x^2 - 1)^2 + 18y(2y^3 - 1)} \text{ si } y \neq 0\,.$$

Vemos que $(x^2 - 1)^2 + 18y(2y^3 - 1)$ tiene que ser $\neq 0$. □

9. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente por $3x^2 - x^2\sqrt{y} + y^3 = 3$ en el punto $(1, 1)$.

▼ En efecto, el punto $(1, 1)$ pertenece a la gráfica de la función, pues sus coordenadas $x = 1$ & $y = 1$ satisfacen la ecuación ya que

$$3 \times (1)^2 - (1)^2\sqrt{1} + (1)^3 = 3 - 1 + 1 = 3.$$

La pendiente de cualquier tangente está dada por

$$6x - 2x\sqrt{y} - \frac{x^2}{2\sqrt{y}}y' + 3y^2y' = 0 \Leftrightarrow y'\left(3y^2 - \frac{x^2}{2\sqrt{y}}\right) = 2x\sqrt{y} - 6x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y' = \frac{2x\sqrt{y} - 6x}{3y^2 - \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}}\,.$$

En el punto $(1, 1)$ la pendiente es

$$y'(1, 1) = \frac{2 \times 1\sqrt{1} - 6(1)}{3(1)^2 - \dfrac{1^2}{2\sqrt{1}}} = \frac{2 - 6}{3 - \dfrac{1}{2}} = \frac{-4}{\dfrac{5}{2}} = -\frac{8}{5}\,.$$

Por lo que la ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = -\frac{8}{5}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{8}{5}x + \frac{8}{5} + 1 \Rightarrow y = -\frac{8}{5}x + \frac{13}{5}\,.$$

□

10. Obtener la ecuación de la recta normal a la curva $\sqrt{3x^2y^3 + 2x^2 - y} = 4 + 2x$ en el punto $(-1, 1)$.

▼ Vemos que:

$$\sqrt{3x^2y^3 + 2x^2 - y} = 4 + 2x \Rightarrow 3x^2y^3 + 2x^2 - y = (4 + 2x)^2.$$

Verificamos que, en efecto, el punto $(-1, 1)$ pertenece a la curva

$$3(-1)^2(1)^3 + 2(-1)^2 - 1 = [4 + 2(-1)]^2 \;\Rightarrow\; 4 = 4.$$

Suponemos que $y = g(x)$ y derivamos implícitamente respecto a x toda la ecuación:

$$\begin{aligned}
3\frac{d}{dx}(x^2y^3) + 2\frac{d}{dx}x^2 - \frac{d}{dx}y &= \frac{d}{dx}(4+2x)^2 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; 3\left[x^2 3y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3\right] + 2(2x) - \frac{dy}{dx} &= 2(4+2x)2 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; 9x^2y^2\frac{dy}{dx} + 6xy^3 + 4x - \frac{dy}{dx} &= 16 + 8x \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; (9x^2y^2 - 1)\frac{dy}{dx} &= 16 + 8x - 4x - 6xy^3 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} &= \frac{16 + 4x - 6xy^3}{9x^2y^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Valuando en el punto $(-1, 1)$ se obtiene la pendiente m_t de la recta tangente a la curva en el punto $(-1, 1)$.

$$m_t = \frac{16 + 4(-1) - 6(-1)(1)^3}{9(-1)^2(1)^2 - 1} = \frac{16 - 4 + 6}{9 - 1} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}\,.$$

La pendiente de la recta normal es $m_n = -\frac{4}{9}$.

La ecuación de la recta normal es

$$y - 1 = -\frac{4}{9}(x+1) \;\Rightarrow\; y = -\frac{4}{9}x - \frac{4}{9} + 1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{4}{9}x + \frac{5}{9}\,.$$

□

11. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $2x^3y + 3xy^3 = 5$ en el punto $(1, 1)$.

▼ Verificamos que, en efecto, el punto $(1, 1)$ pertenece a la curva

$$2(1)^3(1) + 3(1)(1)^3 = 5 \;\Rightarrow\; 5 = 5.$$

Suponemos que en la ecuación $2x^3y + 3xy^3 = 5$ se tiene implícitamente definida la función $y = \phi(x)$ que es una función derivable.

Derivando implícitamente respecto a x se obtiene

$$\begin{aligned}
2\frac{d}{dx}(x^3y) + 3\frac{d}{dx}(xy^3) &= \frac{d}{dx}5 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; 2\left[x^3\frac{dy}{dx} + y(3x^2)\right] + 3\left[x\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (1)y^3\right] &= 0 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; 2x^3\frac{dy}{dx} + 6x^2y + 9xy^2\frac{dy}{dx} + 3y^3 &= 0 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; (2x^3 + 9xy^2)\frac{dy}{dx} &= -3y^3 - 6x^2y \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} &= -\frac{3y^3 + 6x^2y}{2x^3 + 9xy^2}\,.
\end{aligned}$$

Valuamos en el punto $(1, 1)$ y hallamos que la pendiente de la recta tangente es:

$$m_t = -\frac{3(1)^3 + 6(1)^2(1)}{2(1)^3 + 9(1)(1)^2} = -\frac{3+6}{2+9} = -\frac{9}{11}\,.$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (1, 1) es:

$$y - 1 = -\frac{9}{11}(x - 1) \;\Rightarrow\; y = -\frac{9}{11}x + \frac{9}{11} + 1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{9}{11}x + \frac{20}{11}\,.$$

□

12. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2y^2 = (y + 1)^2(4 - y^2)$ en el punto $(0, -2)$.

▼ Verificamos que, en efecto, el punto $(0, -2)$ pertenece a la curva

$$0^2(-2)^2 = (-2 + 1)^2[4 - (-2)^2] \;\Rightarrow\; 0 = 0.$$

Suponemos que en la ecuación dada se tiene implícitamente definida la función $y = \phi(x)$.

Derivando implícitamente con respecto a x se obtiene:

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2) = \frac{d}{dx}[(y + 1)^2(4 - y^2)] \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x^2\frac{d}{dx}y^2 + y^2\frac{d}{dx}x^2 = (y + 1)^2\frac{d}{dx}(4 - y^2) + (4 - y^2)\frac{d}{dx}(y + 1)^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x^2 2y\frac{dy}{dx} + y^2 2x = (y + 1)^2(-2y)\frac{dy}{dx} + (4 - y^2)2(y + 1)\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = -2y(y + 1)^2\frac{dy}{dx} + 2(4 - y^2)(y + 1)\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2x^2y\frac{dy}{dx} + 2y(y + 1)^2\frac{dy}{dx} - 2(4 - y^2)(y + 1)\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}[2x^2y + 2y(y + 1)^2 - 2(4 - y^2)(y + 1)] = -2xy^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2[x^2y + y(y^2 + 2y + 1) - (4y + 4 - y^3 - y^2)]\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2[x^2y + y^3 + 2y^2 + y - 4y - 4 + y^3 + y^2]\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2[x^2y + 2y^3 + 3y^2 - 3y - 4]\frac{dy}{dx} = -2xy^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^2}{2(x^2y + 2y^3 + 3y^2 - 3y - 4)} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{-xy^2}{x^2y + 2y^3 + 3y^2 - 3y - 4}\,.$$

Valuamos en el punto $(0, -2)$; esto es, hacemos $x = 0$ & $y = -2$:

$$\frac{dy}{dx}(0, -2) = \frac{0}{0 + 2(-8) + 3(4) + 6 - 4} = \frac{0}{-2} = 0.$$

Encontramos que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(0, -2)$ es $m = 0$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - (-2) = m(x - 0) \;\Rightarrow\; y + 2 = 0(x - 0) \;\Rightarrow\; y + 2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -2.$$

□

13. Muestre que las rectas tangentes a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ en los puntos $(1, -1)$ & $(-1, 1)$ son paralelas.

▼ Verificamos que, en efecto, los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ pertenecen a las curvas.

Para $(1, -1)$: $\quad 1^2 - 1(-1) + (-1)^2 = 3 \;\Rightarrow\; 3 = 3.$

Para $(-1,1)$: $\quad (-1)^2-(-1)(1)+1^2=3 \;\Rightarrow\; 3=3.$

Suponemos que en la ecuación $x^2-xy+y^2=3$ se tiene implícitamente definida a la variable y como función de la variable x.

Derivamos implícitamente con respecto a x toda la ecuación:

$$\frac{d}{dx}x^2-\frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}3 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2x-\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+2y\frac{dy}{dx}=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 2x-x\frac{dy}{dx}-y+2y\frac{dy}{dx}=0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}(2y-x)=y-2x \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{y-2x}{2y-x}.$$

Valuando la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $A(1,-1)$ se obtiene,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_A=\frac{-1-2(1)}{2(-1)-1}=\frac{-1-2}{-2-1}=\frac{-3}{-3}=1=m_A,$$

que es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto A.

Valuando la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $B(-1,1)$, se obtiene,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_B=\frac{1-2(-1)}{2(1)-(-1)}=\frac{1+2}{2+1}=\frac{3}{3}=1=m_B,$$

que es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto B.

Ya que $m_A=m_B$, entonces las rectas tangentes son paralelas. □

14. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $3x^2+5y^2-3x^2y^2=11$ en el punto $(1,2)$.

▼ El punto sí pertenece a la gráfica de la función, pues sus coordenadas $x=1$, $y=2$ satisfacen a la ecuación ya que

$$3(1)^2+5(2)^2-3(1)^2(2)^2=(3\times 1)+(5\times 4)-(3\times 1\times 4)=3+20-12=11.$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada, por lo que derivamos implícitamente con respecto a x, obteniendo:

$$6x+10yy'-6xy^2-6x^2yy'=0 \;\Rightarrow\; (10y-6x^2y)y'=-6x+6xy^2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y'=\frac{6xy^2-6x}{10y-6x^2y}=\frac{3xy^2-3x}{5y-3x^2y}.$$

En particular, en el punto $(1,2)$ la derivada vale

$$y'(1,2)=\frac{3\times 1(2)^2-3\times 1}{5\times 2-3(1)^2 2}=\frac{3\times 4-3}{10-6}=\frac{12-3}{4}=\frac{9}{4}$$

y la ecuación de la recta tangente es

$$y-2=\frac{9}{4}(x-1) \;\Rightarrow\; y=\frac{9}{4}x-\frac{9}{4}+2 \;\Rightarrow\; y=\frac{9}{4}x-\frac{9-8}{4} \;\Rightarrow\; y=\frac{9}{4}x-\frac{1}{4}.$$

□

15. Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por la ecuación

$$\frac{3x^5}{2y^2+1}+\sqrt{x^2+xy^5}=4$$

en el punto $(1,0)$.

▼ Verificamos que, en efecto, el punto $(1,0)$ pertenece a la curva

$$\frac{3(1)^5}{2(0)^2+1}+\sqrt{1^2+1(0)^5}=4 \Rightarrow 3+1=4.$$

Derivando implícitamente con respecto a la variable x,

$$\frac{15x^4(2y^2+1)-4yy'\times 3x^5}{(2y^2+1)^2}+\frac{2x+y^5+5xy^4y'}{2\sqrt{x^2+xy^5}}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [15x^4(2y^2+1)-4yy'\times 3x^5]2\sqrt{x^2+xy^5}+(2x+y^5+5xy^4y')(2y^2+1)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'[5xy^4(2y^2+1)^2-24yx^5\sqrt{x^2+xy^5}]=-15x^4(2y^2+1)2\sqrt{x^2+xy^5}-(2x+y^5)(2y^2+1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-30x^4(2y^2+1)\sqrt{x^2+xy^5}-(2x+y^5)(2y^2+1)^2}{5xy^4(2y^2+1)^2-24x^5y\sqrt{x^2+xy^5}}$$

y valuándola en el punto $(1,0)$,

$$y'(1,0)=\frac{-30\times 1^4(2\times 0^2+1)\sqrt{1^2+1\times 0^5}-(2\times 1+0^5)(2\times 0^2+1)^2}{5\times 1\times 0^4(2\times 0^2+1)^2-24\times 1^5\times 0\sqrt{1^2+1\times 0^5}}=\text{“}\left(\frac{-30-2}{0}\right)\text{”}.$$

Por lo que la recta tangente en el punto $(1,0)$ es paralela al eje de las y, en cuyo caso su ecuación es $x=1$ y la de la normal es $y=0$ (el eje de las x). □

16. Encontrar la ecuación de la recta tangente a $2x^2-3y^3+\dfrac{2y}{xy-1}=-5$ en el punto $(0,1)$.

▼ Las coordenadas del punto $(0,1)$ satisfacen a la ecuación

$$2\times 0^2-3\times 1^3+\frac{2\times 1}{0\times 1-1}=-3-2=-5\ .$$

Suponemos que existe una función derivable $y=\phi(x)$ definida implícitamente. Vamos a derivar la ecuación con respecto a la variable x para obtener:

$$4x-9y^2y'+2\frac{(xy-1)y'-y(y+xy')}{(xy-1)^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-9y^2y'+2\frac{xyy'-y'-y^2-xyy'}{(xy-1)^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-9y^2y'+2\frac{-y'-y^2}{(xy-1)^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-9y^2y'-\frac{2}{(xy-1)^2}y'-\frac{2y^2}{(xy-1)^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[-9y^2-\frac{2}{(xy-1)^2}\right]y'=-4x+\frac{2y^2}{(xy-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'=\frac{-4x+\dfrac{2y^2}{(xy-1)^2}}{-9y^2-\dfrac{2}{(xy-1)^2}}\ .$$

Valuamos $y'(0,1)$:

$$y'(0,1) = \frac{\frac{2}{1}}{-9 - \frac{2}{1}} = \frac{2}{-11}\,,$$

y por lo tanto, la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(0,1)$ con pendiente $-\frac{2}{11}$ es:

$$\frac{y-1}{x-0} = -\frac{2}{11} \;\Rightarrow\; y = -\frac{2}{11}x + 1\,.$$

□

17. Encontrar en el punto $(-2,2)$ la ecuación de la recta tangente a la curva $x^4 + y^3 = 24$.

▼ Vamos a comprobar que el punto dado $(-2,2)$ está en la gráfica de la función definida implícitamente:

$$(-2)^4 + 2^3 = 16 + 8 = 24.$$

Derivamos la expresión implícitamente

$$4x^3 + 3y^2y' = 0 \;\Rightarrow\; 3y^2y' = -4x^3 \;\Rightarrow\; y' = -\frac{4}{3}\frac{x^3}{y^2}\,.$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente, valuamos la derivada en $(-2,2)$:

$$y'(-2,2) = -\frac{4}{3}\frac{(-2)^3}{2^2} = -\frac{4}{3}\left(\frac{-8}{4}\right) = \frac{8}{3}\,.$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$\frac{y-2}{x-(-2)} = \frac{8}{3} \;\Rightarrow\; y - 2 = \frac{8}{3}x + \frac{16}{3} \;\Rightarrow\; y = \frac{8}{3}x + \frac{22}{3}\,.$$

El ejercicio no pide hacer los cálculos de manera implícita y en este caso podemos despejar y:

$$y = \sqrt[3]{24 - x^4} = (24 - x^4)^{\frac{1}{3}}.$$

Derivamos:

$$y' = \frac{1}{3}(24 - x^4)^{-\frac{2}{3}}(-4x^3).$$

Para calcular la pendiente de la recta tangente, valuamos la derivada en $x = -2$:

$$y'(-2) = \frac{1}{3}\left[24 - (-2)^4\right]^{-\frac{2}{3}}\left[-4(-2)^3\right] = \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}(32) =$$
$$= \frac{32}{3} \times \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{32}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$$

y la ecuación de la recta tangente se calcula como antes. □

18. Sea $y = f(x)$ definida implícitamente por $x^4 + 3x^2y + y^3 = 5$. Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto $(-1,1)$.

▼ Verificamos que, en efecto, el punto $(-1,1)$ pertenece a la curva

$$(-1)^4 + 3(-1)^2(1) + 1^3 = 5 \;\Rightarrow\; 5 = 5.$$

Derivando

$$4x^3 + 3(2xy + x^2y') + 3y^2y' = 0 \;\Rightarrow\; 4x^3 + 6xy + 3x^2y' + 3y^2y' = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 3(x^2 + y^2)y' = -4x^3 - 6xy \;\Rightarrow\; y' = -\frac{4x^3 + 6xy}{3(x^2 + y^2)}$$

y valuando en el punto $(-1, 1)$

$$y'(-1, 1) = -\frac{4(-1)^3 + 6(-1)(1)}{3\,[(-1)^2 + (1)^2]} = -\frac{-4 - 6}{3(2)} = -\frac{-10}{6} = \frac{5}{3}\,,$$

calculamos la ecuación de la recta tangente

$$\frac{y - 1}{x - (-1)} = \frac{5}{3} \;\Rightarrow\; y - 1 = \frac{5}{3}(x + 1) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3} \;\Rightarrow\; y = \frac{5}{3}x + \frac{8}{3}\,.$$

□

CAPÍTULO

7

Razones de cambio relacionadas

1. Suponga que un incendio forestal se propaga en la forma de un círculo cuyo radio cambia a razón de 1.8 m/min. ¿A qué razón está creciendo el área de la región incendiada cuando el radio alcanza 60 m?

▼ Para un radio arbitrario r, el área del círculo es $A = \pi r^2$.

Considerando que r varía en el tiempo, y que r es función del tiempo, es decir, que $r = r(t)$, entonces $A = A(t)$.

Luego,

$$A = \pi r^2 \;\Rightarrow\; A(t) = \pi r^2(t).$$

Derivando respecto a t obtenemos

$$\frac{d}{dt}A(t) = \frac{d}{dt}\left[\pi r^2(t)\right] \;\Rightarrow\; \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt},$$

donde $\frac{dA}{dt}$ es la razón de cambio del área y $\frac{dr}{dt}$ es la razón de cambio del radio, ambas derivadas con respecto a t.

Para $r = 60$ m y $\frac{dr}{dt} = 1.8$ m/min tenemos

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(60\text{ m})(1.8\text{ m/min}) = 216\pi\text{ m}^2/\text{min}.$$

Por lo tanto, la razón o rapidez de cambio del área es:

$$\frac{dA}{dt} \approx 679\text{ m}^2/\text{min}.$$

□

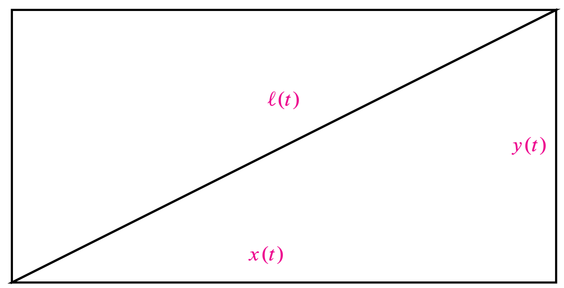
2. Sea ℓ la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes x & y respectivamente. Si x aumenta con una rapidez de $\frac{1}{2}$ m/s y si y disminuye con una rapidez de $\frac{1}{4}$ m/s:

a. ¿A qué razón está cambiando la longitud de la diagonal cuando $x = 3$ m & $y = 4$ m?

b. ¿La diagonal está aumentando o disminuyendo en ese instante?

▼

a. Usamos la figura



De la figura, tenemos

$$\ell^2(t) = x^2(t) + y^2(t);$$

derivando con respecto a t:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}[\ell^2(t)] &= \frac{d}{dt}[x^2(t) + y^2(t)];\\ 2\ell(t)\ell'(t) &= 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t);\\ \ell'(t) &= \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2\ell(t)} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\ell(t)}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto en un momento, digamos t_0, en el que $x(t_0) = 3$ & $y(t_0) = 4$, se tiene

$$\ell(t_0) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Sabemos que $x'(t_0) = \dfrac{1}{2}$ & $y'(t_0) = -\dfrac{1}{4}$.

Sustituyendo estos obtenemos

$$\ell'(t_0) = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{4}\right)}{5} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{5} = \frac{\frac{1}{2}}{5} = \frac{1}{10} > 0\,.$$

b. La longitud de la diagonal crece en ese momento, pues $\ell'(t_0) > 0$.

□

3. Un anuncio publicitario tiene forma de un cilindro circular recto. Determinar la variación de su volumen en el proceso de inflado, sabiendo que la altura permanece constante.

▼ Sabemos que $V_{\textbf{cilindro}} = \pi r^2 h$ y que h es constante, por lo que la única variable es $r = r(t)$.

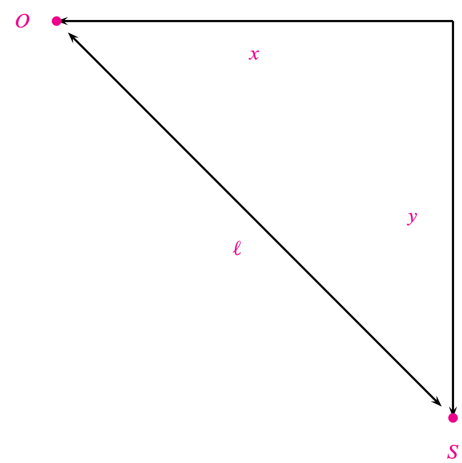
Entonces:

$$\frac{dV_{\textbf{cilindro}}}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt}.$$

Conociendo $r(t)$ en un cierto instante y la razón de cambio del radio $\dfrac{dr}{dt}$ en dicho instante, se puede calcular la razón de cambio del volumen del cilindro. □

4. Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto con velocidad constante. Uno viaja hacia el sur a 60 km/h y el otro hacia al oeste a 25 km/h ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles 2 h más tarde?

▼ Usamos la siguiente gráfica para representar la posición de los automóviles:



Por el teorema de Pitágoras:

$$\ell^2 = x^2 + y^2.$$

Obsérvese que tanto ℓ como x & y varían con respecto al tiempo.

Derivamos con repecto al tiempo esta relación entre las posiciones:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\ell^2) &= \frac{d}{dt}(x^2 + y^2);\\ \frac{d}{dt}(\ell^2) &= \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2);\\ 2\ell\ \ell' &= 2x\ x' + 2y\ y'.\end{aligned}$$

Despejamos la derivada que deseamos evaluar:

$$\begin{aligned}\ell' &= \frac{2x\ x' + 2y\ y'}{2\ell};\\ \ell' &= \frac{x\ x' + y\ y'}{\ell}.\end{aligned}$$

Por último sustituimos por las condiciones proporcionadas:

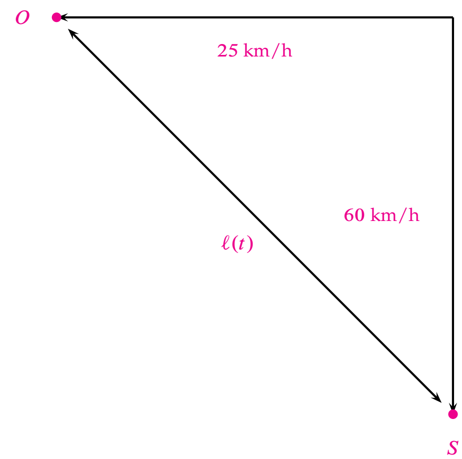
$$x(2) = 50; \quad x'(t) = 25; \quad y(2) = 120\ \&\ y'(t) = 60.$$

Entonces hallamos:

$$\ell' = \frac{(50)(25) + (120)(60)}{\sqrt{50^2 + 120^2}} = 65\ \text{km/h};$$

$\ell' = 65\,\text{km/h}$ es la razón con que aumenta la distancia entre los dos automóviles 2 h más tarde de haberse iniciado los desplazamientos.

Podemos resolver el problema de otra forma usando la siguiente gráfica:



El espacio que recorre el autómovil que va hacia el sur (en km) es $60\,t$, con t en horas; y el del otro automóvil es $25\,t$, por lo que, por el teorema de Pitágoras, la distancia entre ambos automóviles es:

$$\ell(t) = \sqrt{(60t)^2 + (25t)^2} = \sqrt{3\,600t^2 + 625t^2} = \sqrt{4\,225}\,t = 65t \text{ km}.$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}\ell(t) = \ell'(t) = 65 \text{ km/h},$$

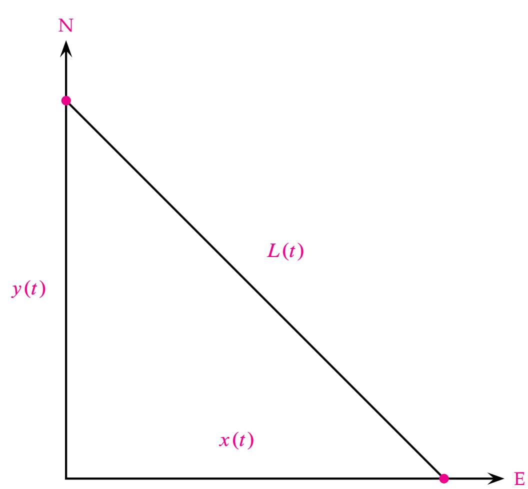
y en particular

$$\frac{d}{dt}\ell(t)\bigg|_{t=2} = \ell'(t)\big|_{t=2} = 65 \text{ km/h}.$$

□

5. Dos trenes parten de una estación con 3 h de diferencia. El que parte primero se dirige hacia el norte con una rapidez de 100 km/h. El otro tren se dirige hacia el este con una rapidez de 60 km/h. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los trenes 2 h después de que partió el segundo tren?

▼



Digamos que para todo valor de t, la posición del primer tren es $y(t)$, la posición del segundo tren es $x(t)$ y la distancia entre los trenes es $L(t)$.

Se cumple entonces que:

$$L^2 = x^2 + y^2.$$

Derivando implícitamente con respecto a t

$$\frac{d}{dt}[L^2] = \frac{d}{dt}[x^2 + y^2];$$
$$2LL' = 2xx' + 2yy' \Rightarrow LL' = xx' + yy';$$
$$L' = \frac{xx' + yy'}{L}.$$

Si denotamos con $\bar{t}$ el momento en el cual han transcurrido 2 h después de que partió el segundo tren, tenemos

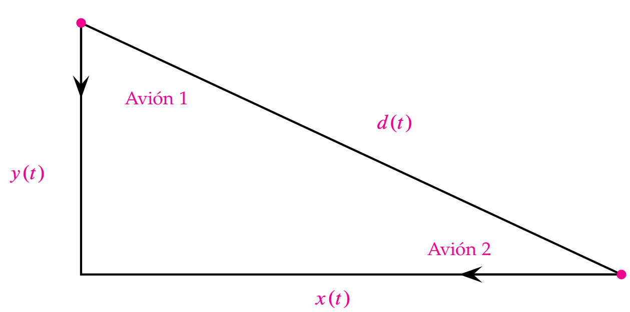
$$x(\bar{t}) = 120,\ x'(\bar{t}) = 60;$$
$$y(\bar{t}) = 500,\ y'(\bar{t}) = 100;$$
$$L(\bar{t}) = \sqrt{(x(\bar{t}))^2 + (y(\bar{t}))^2} = \sqrt{120^2 + 500^2} = \sqrt{14\,400 + 250\,000} = \sqrt{264\,400} \approx 514.19841.$$

Sustituyendo, tenemos

$$L'(\bar{t}) = \frac{120 \times 60 + 500 \times 100}{514.19841} \approx 111.2411\,.$$

La distancia entre los trenes está cambiando a razón de 111.2411 km/h, 2 h después de que partió el segundo tren. □

6. Un controlador aéreo sitúa 2 aviones a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto de encuentro (ver figura). Uno de ellos (avión 1) está a 150 millas de ese punto y vuela a 450 millas por hora. El otro (avión 2) está a 200 millas del punto y vuela a 600 millas por hora.



a. ¿A qué velocidad decrece la distancia entre los aviones?
b. ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias diferentes?

▼

a. En todo momento, t arbitrario, se tiene la relación:

$$d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)\,;$$

derivando con respecto a t:

$$2d(t)d'(t) = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)$$

y despejando $d'(t)$:

$$d'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}\,.$$

Si denotamos con t_0 el instante al que se refiere el enunciado:

$$d'(t_0) = \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} =$$
$$= \frac{200 \times (-600) + 150 \times (-450)}{\sqrt{(200)^2 + (150)^2}} = \frac{-187\,500}{250} = -750 \text{ millas/h.}$$

b. El tiempo que tienen los aviones para llegar al punto de encuentro $(0, 0)$ es

$$\frac{200}{600} = \frac{1}{3} \text{ hora, avión 1}$$
$$\frac{150}{450} = \frac{1}{3} \text{ hora, avión 2}$$

Es decir, los aviones chocarían en 20 minutos si no se cambia la trayectoria.

□

7. Cuando un tanque esférico de radio a contiene líquido con una profundidad h, el volumen de este líquido está dado por

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h).$$

Suponga ahora que un tanque esférico de 5 m de radio se está llenando de agua a razón de $\frac{20}{3}$ ℓ/s. Calcule la razón de cambio del nivel de agua cuando $h = 1.25$ m ($1\,\ell = 1\text{ dm}^3$).

▼ Consideramos que en la fórmula

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3a - h) = \pi h^2 a - \frac{1}{3}\pi h^3,$$

tanto la profundidad h como el volumen V están en función del tiempo t.

Cuando $a = 5$ m $= 50$ dm:

$$V = 50\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3.$$

Derivando con respecto a t se obtiene:

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}[50\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3]$$
$$\frac{dV}{dt} = 100\pi h\frac{dh}{dt} - \pi h^2\frac{dh}{dt} = \pi h(100 - h)\frac{dh}{dt},$$

donde $\frac{dV}{dt}$ es la rapidez de cambio del volumen y $\frac{dh}{dt}$ es la rapidez de cambio de la profundidad.

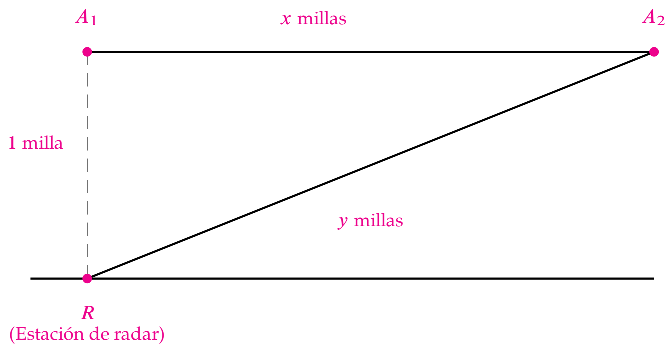
Cuando $\frac{dV}{dt} = \frac{20}{3}\ \ell/\text{s} = \frac{20}{3}\text{ dm}^3/\text{s}$ & $h = 1.25\text{ m} = 12.5\text{ dm}$:

$$\frac{20}{3} = \pi(12.5)(100 - 12.5)\frac{dh}{dt} \Rightarrow \pi(12.5)(87.5)\frac{dh}{dt} = \frac{20}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\,093.75\pi\frac{dh}{dt} = \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{3(1\,093.75)\pi} \approx 0.00194017 \text{ dm/s.}$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la profundidad es $\frac{dh}{dt} \approx 0.00194017$ dm/s. □

8. Un avión vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla a una velocidad de 500 millas/h y pasa sobre una estación de radar. Encuentre la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando el avión está a 2 millas de la estación.

▼ Usamos la figura siguiente:



Por el teoréma de Pitágoras, $y^2 = x^2 + 1^2$, donde y & x dependen del tiempo t. Derivando implícitamente con respecto a t,

$$\frac{d}{dt}y^2 = \frac{d}{dt}(x^2 + 1) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}.$$

Donde $\dfrac{dx}{dt} = 500$ millas/h.

Considerando que cuando $y = 2$, $x^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$, entonces:

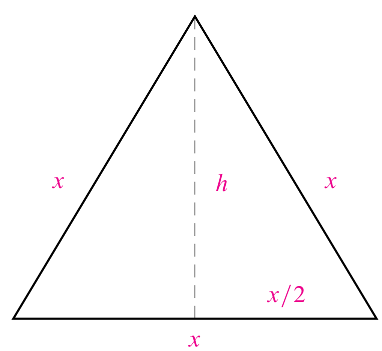
$$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2\frac{dy}{dt} = \sqrt{3}(500) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{500\sqrt{3}}{2} = 250\sqrt{3} \approx 433 \Rightarrow \frac{dy}{dt} \approx 433 \text{ millas/h}$$

es la razón a la que aumenta la distancia del avión a la estación cuando $y = 2$ millas. □

9. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h.

¿Con qué rapidez crece el área cuando cada lado mide 8 cm?

▼ Veamos esos datos con la siguiente figura



De ella tenemos

$$h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

El área del triángulo es un medio de la base por la altura:

$$A = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2.$$

Suponemos que los lados x dependen del tiempo $x(t)$, de hecho crecen. Por lo tanto, el área también depende del tiempo:

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t).$$

Derivando con respecto a t tenemos

$$\frac{d}{dt}[A(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t)\right];$$

$$A'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}2x(t)x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t) \times x'(t).$$

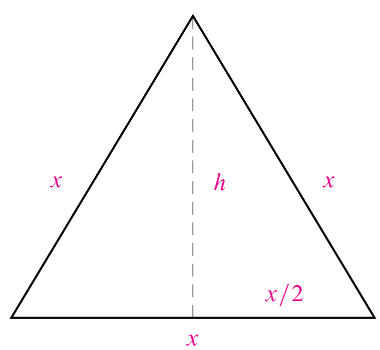
Si suponemos que en un tiempo t_8, no conocido, se tiene que $x(t_8) = 8$, en ese tiempo se tiene también $x'(t_8) = 2$. Por lo tanto:

$$A'(t_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t_8) \times x'(t_8) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 \times 2 = 8\sqrt{3} \approx 13.856406 \text{ cm}^2/\text{hora}.$$

□

10. Una placa en forma de triángulo equilátero se expande con el tiempo. Cada lado aumenta a razón constante de 2 cm/h. ¿Cuál es la razón de crecimiento del área en el instante en que el valor de ésta es $\sqrt{75}$ cm^2?

▼ Llevemos estos datos a la siguiente figura



El área del triángulo es un medio de la base por la altura:

$$A = \frac{1}{2}xh. \tag{A}$$

Deseamos que la función anterior dependa sólo de x. Para esto, usando el teórema de Pitágoras, vemos en la figura que:

$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x;$$

sustituimos por este valor en (A)

$$A = \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

y puesto que x es una función de t:

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t); \tag{B}$$

derivamos con respecto a t:

$$\frac{d}{dt}[A(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t)\right];$$
$$A'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 \times x(t) \times x'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times x(t) \times x'(t). \qquad \text{(C)}$$

Sabemos lo siguiente:

a. $x'(t)$ siempre es igual a 2 cm/h.

b. En un cierto momento, digamos t_0, el valor del área es $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm^2.
Usamos (B) para encontrar el valor del lado del triángulo en ese momento:

$$A(t_0) = 5\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2(t_0) \Rightarrow x^2(t_0) = 20 \Rightarrow x(t_0) = 2\sqrt{5}.$$

Utilizando estos valores en (C), obtenemos la variación deseada del área:

$$A'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{15}\ \text{cm}^2/\text{h}.$$

□

11. La ley adiabática (sin pérdida ni ganancia de calor) para la expansión de un gas es

$$PV^{1.4} = C,$$

(donde P es la presión, V el volumen y C una constante). En cierto instante, el volumen es de 1 pie^3, la presión es de 40 libras/pie^2 y ésta está creciendo a razón de 8 libras/pie^2 en cada segundo. Calcular la razón de variación del volumen en dicho instante.

▼ Derivando implícitamente $PV^{1.4} = C$:

$$\frac{d}{dt}[PV^{1.4}] = \frac{d}{dt}[C];$$
$$\frac{d(PV^{1.4})}{dt} = V^{1.4}\frac{dP}{dt} + P(1.4)V^{0.4}\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{-V^{1.4}\frac{dP}{dt}}{(1.4)V^{0.4} \cdot P} = -\frac{V\frac{dP}{dt}}{(1.4)P}.$$

Y sustituyendo por los valores $V = 1$, $\frac{dP}{dt} = 8$ & $P = 40$ obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{8}{(1.4)40} = -\frac{1}{(1.4)5} = -\frac{1}{7}\ \text{pie}^3/\text{s}.$$

Otra forma de resolver este problema:

De $PV^{1.4} = C$ se tiene que

$$V^{1.4} = \frac{C}{P} \Rightarrow V^{\frac{14}{10}} = \frac{C}{P} \Rightarrow V^{\frac{7}{5}} = \frac{C}{P}.$$

Despejamos V elevando ambos miembros de la igualdad a la potencia $\frac{5}{7}$:

$$V = \left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{5}{7}} = C^{\frac{5}{7}}P^{-\frac{5}{7}}.$$

Derivando con respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{dV}{dt} = C^{\frac{5}{7}} \times \frac{dP^{-\frac{5}{7}}}{dt} = -\frac{5}{7} \times C^{\frac{5}{7}} \times P^{-\frac{12}{7}} \times \frac{dP}{dt}.$$

Cuando $V = 1$, $P = 40$ y como $C = PV^{1.4}$, entonces:

$$C = 40.$$

Además, $\dfrac{dP}{dt} = 8$.

Utilizando por último estos valores tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{-5}{7}(40)^{\frac{5}{7}}(40^{-\frac{12}{7}})(8) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{-5}{7}40^{-1}(8) \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{40}{7 \times 40}\frac{\text{pie}^3}{\text{s}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{7}\frac{\text{pie}^3}{\text{s}}.$$

□

12. Cuando se expande aire a temperatura constante, su presión y su volumen, satisfacen

$$PV^{1.4} = C\,,$$

donde C es una constante. Si en un momento determinado el volumen es de 400 cm^3 y la presión es de 80 KPa, disminuyendo ésta a razón de 10 KPa/min, ¿con qué razón aumenta el volumen en ese instante?

▼ En la ecuación $PV^{1.4} = C$ se tiene que P & V son funciones de t. Derivamos entonces implícitamente respecto a t:

$$\frac{d}{dt}(PV^{1.4}) = \frac{d}{dt}C \Rightarrow P\frac{d}{dt}V^{1.4} + V^{1.4}\frac{d}{dt}P = 0 \Rightarrow P(1.4)V^{0.4}\frac{dV}{dt} + V^{1.4}\frac{dP}{dt} = 0;$$

despejamos $\dfrac{dV}{dt}$:

$$1.4PV^{0.4}\frac{dV}{dt} = -V^{1.4}\frac{dP}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{V^{1.4}\frac{dP}{dt}}{1.4PV^{0.4}} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{V\frac{dP}{dt}}{1.4P};$$

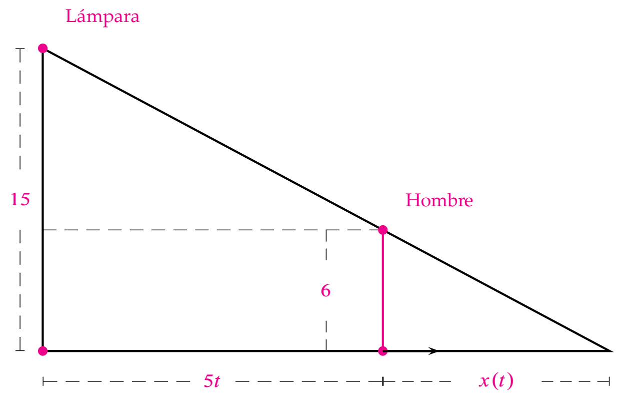
sustituimos por los valores $V = 400$ cm^3, $P = 80$ KPa y $\dfrac{dP}{dt} = -10$ KPa/min y obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{(400 \text{ cm}^3)(-10 \text{ KPa/min})}{1.4(80 \text{ KPa})} = 35.7 \text{ cm}^3/\text{min}.$$

Entonces (ya que $\dfrac{dV}{dt} > 0$), el volumen aumenta a razón de 35.7 cm^3/min. □

13. Una lámpara se encuentra suspendida a 15 pies sobre una calle horizontal y recta. Si un hombre de 6 pies de estatura camina alejándose de la lámpara en línea recta con una velocidad de 5 pies/s, ¿con qué rapidez se alarga su sombra?

▼ Usamos la figura



Por la semejanza de los triángulos rectángulos con un ángulo agudo común, tenemos, considerando que el espacio recorrido por el hombre después de t segundos es $5t$ pies y que la longitud de la sombra es $x(t)$:

$$\frac{6}{15} = \frac{x(t)}{5t + x(t)} \Rightarrow 30t + 6 \cdot x(t) = 15 \cdot x(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(t) = \frac{10}{3}t \Rightarrow x'(t) = \frac{10}{3}.$$

La sombra está creciendo a una velocidad de $\frac{10}{3}$ pie/s.

□

14. Una lámpara proyectora situada sobre el piso ilumina una pared que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia la pared a una velocidad de 1.6 m/s ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre la pared cuando se encuentra a 4 m de ésta?

▼ Veamos la figura A, en el momento que el hombre se encuentra a 4 m de la pared:

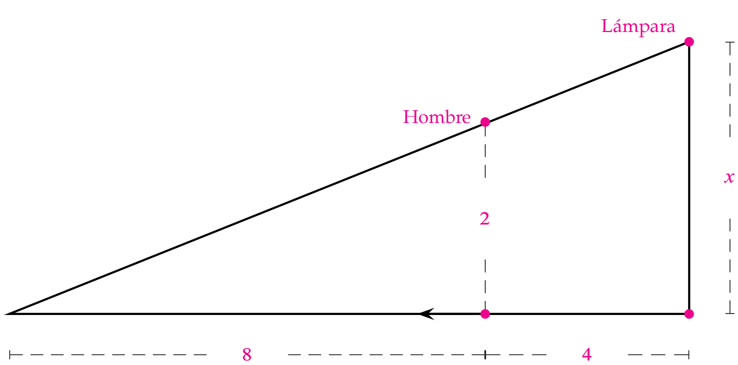


Figura A

Y la figura B, en un momento cualquiera:

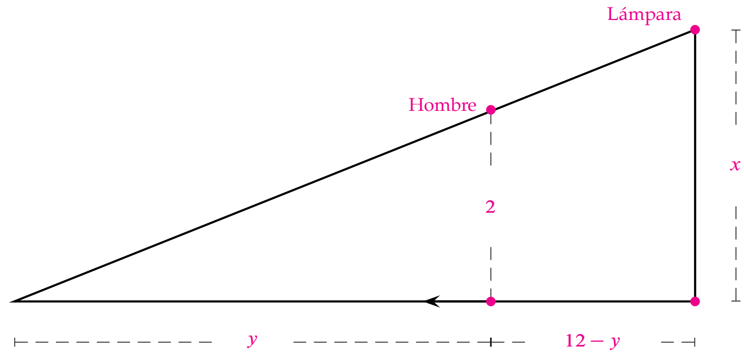


Figura B

De esta última figura, por la semejanza de los triángulos rectángulos, se tiene la relación:

$$\frac{x}{12} = \frac{2}{y} \Rightarrow xy = 24.$$

(Observación. Tenemos $x(t)$ & $y(t)$, funciones que dependen del tiempo).

Derivando esta igualdad con respecto al tiempo t:

$$\frac{d}{dt}[xy] = \frac{d}{dt}[24];$$
$$x'y + xy' = 0 \Rightarrow x' = \frac{-xy'}{y}.$$

En el momento de la figura A tenemos los valores: $y' = 1.6$ m/s, $y = 8$ m & $x = \frac{24}{8} = 3$ m.

Por lo tanto, en ese momento, su sombra decrece con una rapidez igual a

$$x' = -\frac{3 \times 1.6}{8} = -\frac{3}{5} \text{ m/s}.$$

□

15. El radio de una esfera se incrementa a razón de 2 cm/s.

a. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen cuando el radio mide $r = 5$ cm?
b. ¿Cuál es la medida del radio cuando la razón de cambio del volumen es 512 cm^3/s?

▼

a. Sabemos que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Luego,

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \text{ y } \frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r^2(t) \times r'(t).$$

Como $r(t_0) = 5$ cm $\Rightarrow r^2(t_0) = 25$ cm^2 y como $r'(t_0) = 2$ cm/s:

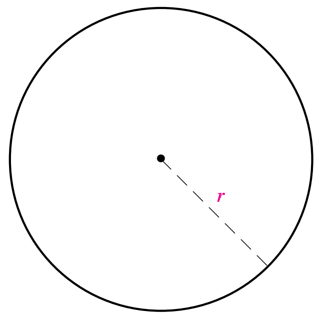
$$\frac{dV(t_0)}{dt} = 4\pi \times 25 \times 2 \text{ cm}^3/\text{s} = 200\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

b. Si $\frac{dV(t)}{dt} = 4\pi r^2(t) \times 2 = 512 \Rightarrow r^2(t) = \frac{512}{8\pi} = \frac{64}{\pi} \Rightarrow r(t) = \frac{8}{\sqrt{\pi}}$ cm.

□

16. Se infla un globo esférico introduciendo aire a razón de 50 cm^3/s. Calcular la velocidad de cambio del radio del globo cuando su diámetro es de 26 cm.

▼ Dibujamos la correspondiente figura



Se sabe que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Considerando que el volumen y el radio cambian con el tiempo, tenemos entonces:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t).$$

Derivando con respecto a t:

$$\frac{d}{dt}[V(t)] = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{3}\pi r^3(t)\right];$$
$$V'(t) = \frac{4}{3}\pi 3r^2(t)r'(t) = 4\pi r^2(t)r'(t).$$

Despejando $r'(t)$:

$$r'(t) = \frac{V'(t)}{4\pi r^2(t)}.$$

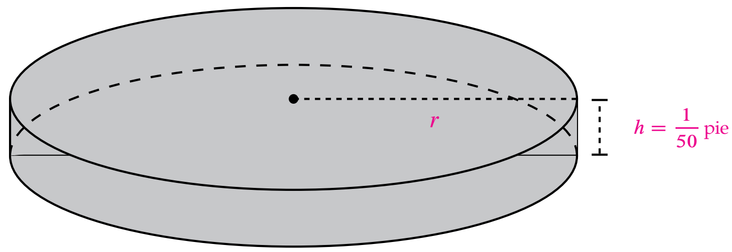
Según los datos proporcionados: $V'(t) = 50$ cm^3/s, en todo momento; entonces existe un momento, digamos t_0, cuando el diámetro $2r(t_0) = 26 \Rightarrow r(t_0) = 13$. Para ese momento t_0 calculamos la variación del radio:

$$r'(t_0) = \frac{V'(t_0)}{4\pi r^2(t_0)} = \frac{50}{4\pi(13)^2} \approx 0.0235 \text{ cm/s}.$$

□

17. Un derrame de petróleo adopta una forma circular y tiene un espesor de $\frac{1}{50}$ pie. Si el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, ¿a qué razón está aumentando el radio de la mancha de petróleo cuando el radio es de 50 pies?

▼ Sea la figura:



Notamos que el derrame tiene la forma de un cilindro recto circular, con una altura o espesor constante $h = \dfrac{1}{50}$ pie y un radio variable r en función del tiempo $t \geq 0$.

Considerando que $r = r(t)$ está en pies, el volumen del derrame V, medido en pies^3, es

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(\frac{1}{50}\right) = \frac{\pi}{50} r^2,$$

es decir,

$$V(t) = \frac{\pi}{50}[r(t)]^2.$$

Derivando implícitamente:

$$\frac{d}{dt}V = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{50}r^2\right] = \frac{\pi}{50} \times 2 \times r \frac{d}{dt}r,$$

esto es,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{25} r \left(\frac{dr}{dt}\right).$$

Como el petróleo se está escapando a razón de 40 pies^3/min, entonces $\dfrac{dV}{dt} = 40$.

Por lo tanto

$$\frac{\pi}{25} r \left(\frac{dr}{dt}\right) = 40.$$

En el instante en que el radio es $r = 50$ pies, sucede que $\dfrac{\pi}{25}(50)\dfrac{dr}{dt} = 40$, de donde

$$\frac{dr}{dt} = \frac{(40)25}{50\pi} = \frac{20}{\pi},$$

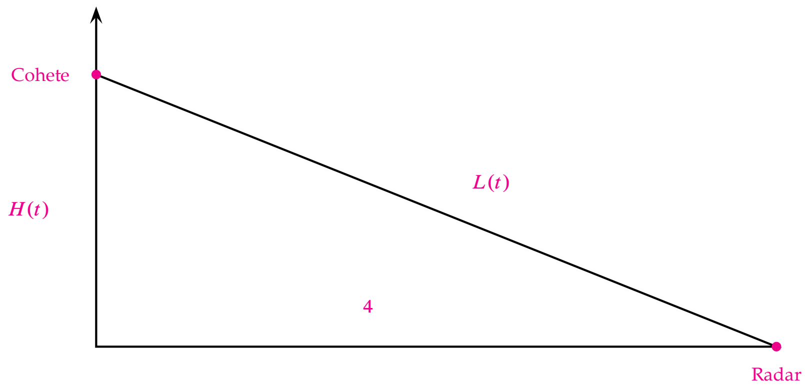
que es la rapidez de cambio del radio.

Esto es, el radio está aumentando a razón de $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{20}{\pi}$ pies/min.

□

18. Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de radar situada en el suelo a 4 millas de la rampa de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y su distancia aumenta a razón de 3 600 millas/h?

▼ Usamos la figura siguiente:



Donde $H(t)$ es la altura del cohete, $L(t)$ es la distancia del cohete a la estación de radar.

De la figura, por el teorema de Pitágoras:

$$L^2(t) = 16 + H^2(t).$$

Derivando implícitamente con respecto a t:

$$\frac{d}{dt}[L^2(t)] = \frac{d}{dt}[16 + H^2(t)];$$
$$2L(t)L'(t) = 2H(t)H'(t) \Rightarrow H'(t) = \frac{L(t)L'(t)}{H}.$$

Usando las condiciones proporcionadas, para el cohete cuando está a 5 millas de la estación de radar y llamando a ese momento $\bar{t}$, $L(\bar{t}) = 5$ & $L'(\bar{t}) = 3\,600$.

Sabemos que

$$H^2(\bar{t}) = L^2(\bar{t}) - 16 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow H(\bar{t}) = \sqrt{9} = 3.$$

Sustituyendo ahora por estos valores

$$H'(\bar{t}) = \frac{5 \times 3\,600}{3} = 6\,000 \text{ millas/h}.$$

□

CAPÍTULO

8

Aplicaciones de la derivada

8.1 Derivabilidad y monotonía

Ejercicios 8.1.1 *Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:*

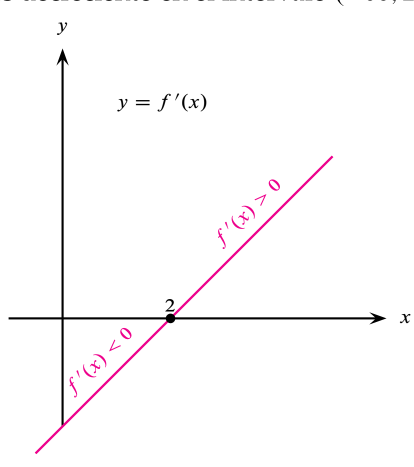
1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

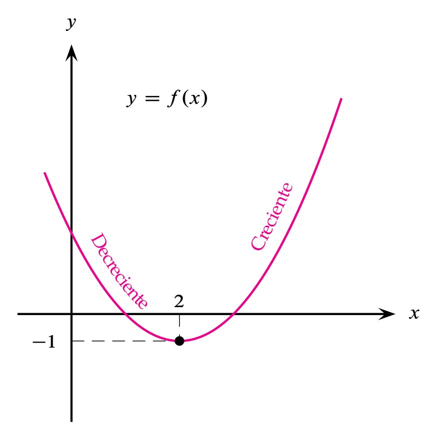
▼
$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x - 4;$$
$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - 4 > 0 \;\Leftrightarrow\; 2x > 4 \;\Leftrightarrow\; x > 2 \;\Rightarrow\; x \in (2, +\infty)\,;$$
$$f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - 4 < 0 \;\Leftrightarrow\; 2x < 4 \;\Leftrightarrow\; x < 2 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty, 2)\,.$$

Por lo tanto,

a. f es creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.

b. f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$.





□

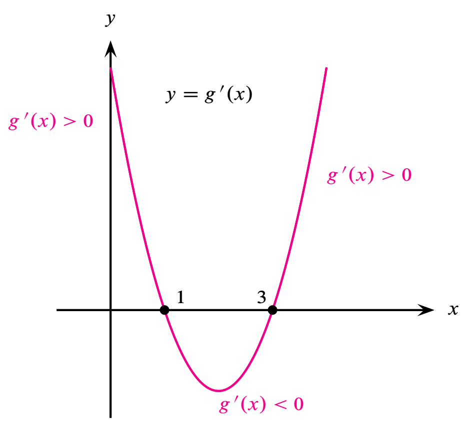
2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

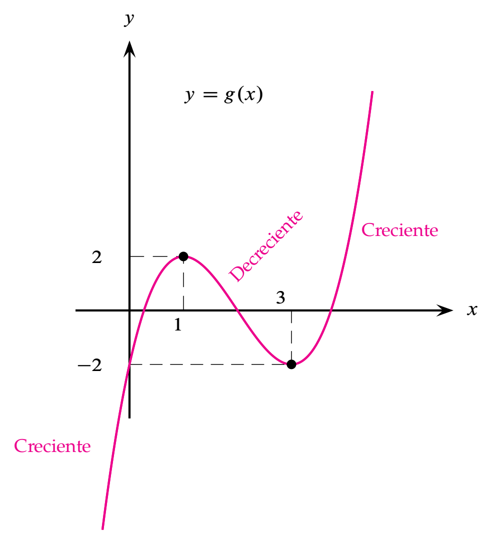
▼

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 12x + 9;$$
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(x) = 0 \text{ cuando } x = 1 \text{ y cuando } x = 3.$$

En base en lo anterior generamos los intervalos $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$, donde se determina el signo de $g'(x)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo $g'(x)$*	*La función g es*
$-\infty < x < 1$	$x = 0$	$+$	creciente
$1 < x < 3$	$x = 2$	$-$	decreciente
$3 < x < +\infty$	$x = 4$	$+$	creciente





□

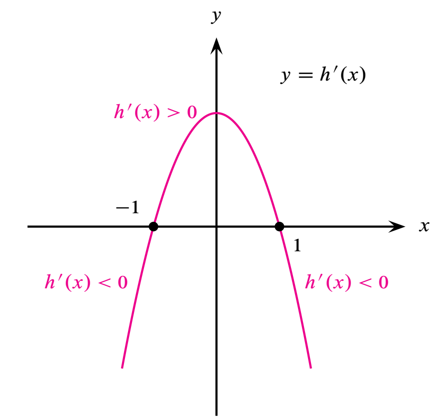
3. $h(x) = -2x^3 + 6x - 1$.

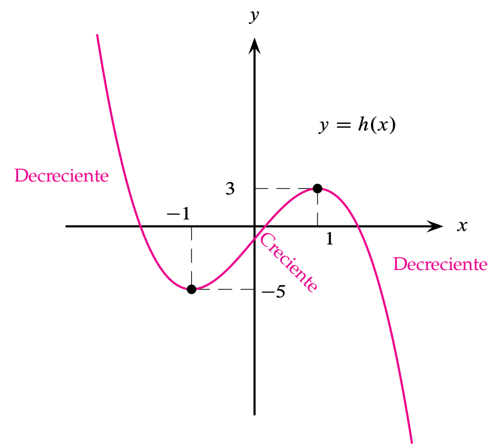
▼

$$h(x) = -2x^3 + 6x - 1 \Rightarrow h'(x) = -6x^2 + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(x) = 0 \text{ cuando } x = -1 \text{ y cuando } x = 1.$$

Con la información anterior se generan los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, donde se determina el signo de $h'(x)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo de $h'(x)$*	*La función h es*
$-\infty < x < -1$	$x = -2$	$-$	decreciente
$-1 < x < 1$	$x = 0$	$+$	creciente
$1 < x < +\infty$	$x = 2$	$-$	decreciente





□

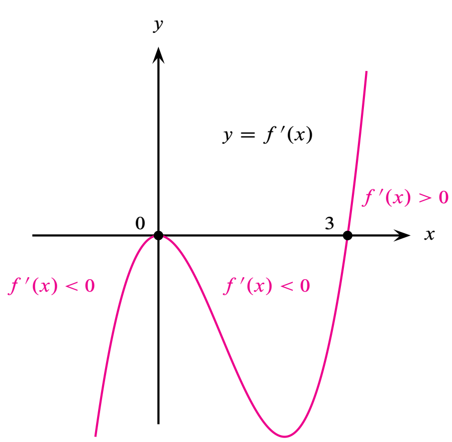
4. $f(x) = x^4 - 4x^3$.

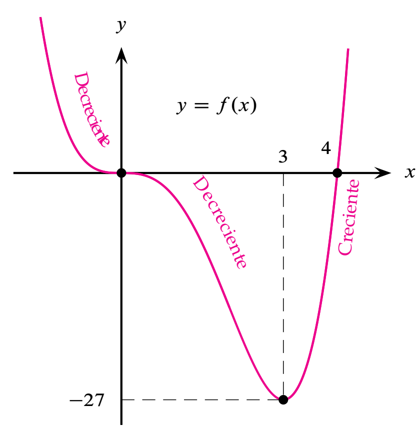
▼ $$f(x) = x^4 - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x^2;$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow$$
$f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ y cuando $x = 3$.

Generamos los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$, donde se determina el signo de $f'(x)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo de $f'(x)$*	*La función f es*
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$-$	decreciente
$0 < x < 3$	$x = 1$	$-$	decreciente
$3 < x < +\infty$	$x = 4$	$+$	creciente

De hecho como $f(x) = x^3(x-4) > 0$ si $x \in (-\infty, 0)$, $f(x) = 0$ si $x = 0$ & $f(x) < 0$ si $x \in (0, 3)$, entonces $f(x)$ resulta ser decreciente en $(-\infty, 3)$.





□

5. $g(x) = (x^2 - 1)^2$.

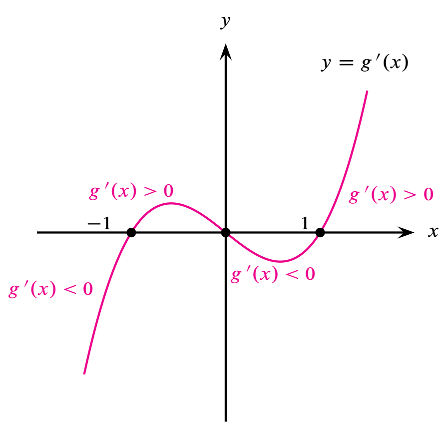
▼

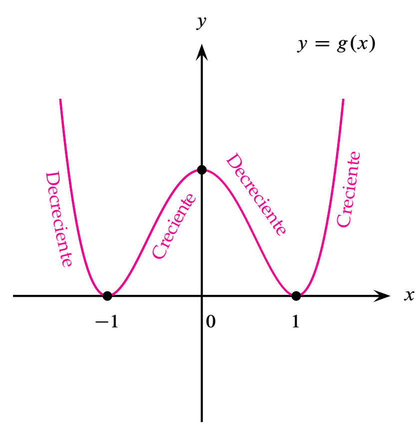
$$g(x) = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2(x^2 - 1)(2x) = 4x(x^2 - 1);$$
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x(x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(x) = 0 \text{ cuando } x = 0, \text{ cuando } x = -1 \text{ y cuando } x = 1.$$

En función de lo anterior se generan los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, donde se determina el signo de $g'(x)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo de $g'(x)$*	*La función g es*
$-\infty < x < -1$	$x = -2$	$-$	decreciente
$-1 < x < 0$	$x = -\frac{1}{2}$	$+$	creciente
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{2}$	$-$	decreciente
$1 < x < +\infty$	$x = 2$	$+$	creciente

Todo concuerda con el hecho de que $g(x)$ es par.





□

6. $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.

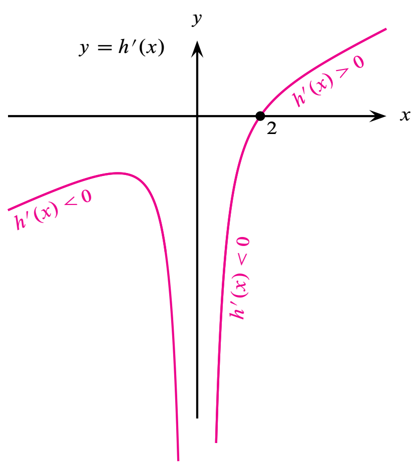
▼

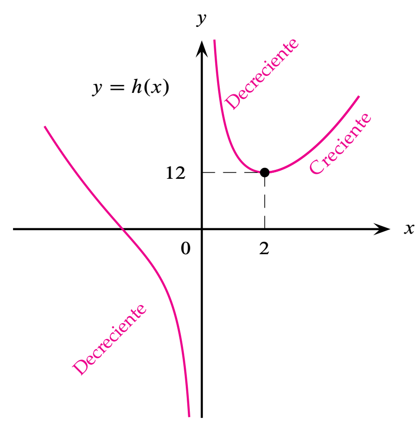
$$h(x) = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + 16x^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(x) = 2x - 16x^{-2} = 2x - \frac{16}{x^2}.$$
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2\,.$$

Además $h'(x)$ no existe cuando $x = 0$.

Con esta información se generan los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$, donde se determina el signo de $h'(x)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo de $h'(x)$*	*La función h es*
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$-$	decreciente
$0 < x < 2$	$x = 1$	$-$	decreciente
$2 < x < +\infty$	$x = 3$	$+$	creciente





□

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

▼

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{(x^2-4)2x - x^2(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2};$$

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; -8x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow$$

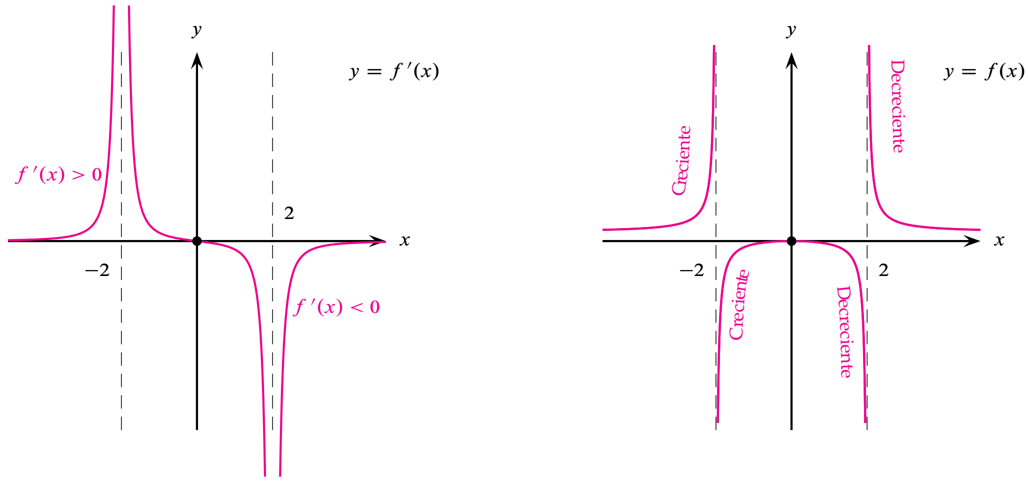
$$\Rightarrow\; f'(x) = 0 \text{ cuando } x = 0.$$

Además $f'(x)$ no existe cuando $x^2 - 4 = 0$, esto es, cuando $x = \pm 2$.
Se generan los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$, donde se determina el signo de $f'(x)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo de $f'(x)$*	*La función f es*
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$+$	creciente
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$+$	creciente
$0 < x < 2$	$x = 1$	$-$	decreciente
$2 < x < +\infty$	$x = 3$	$-$	decreciente

Otra forma de analizar el ejercicio:
Como $(x^2-4)^2 > 0$ en el $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, el signo de $f'(x)$ lo da $-8x$; luego:

$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -8x > 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0 \,\&\, x \neq -2$. Entonces $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$;
$f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; -8x < 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0 \,\&\, x \neq 2$. Entonces $f(x)$ es decreciente en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$.



La información del análisis anterior concuerda con que $f(x)$ es par.

□

8. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

▼

$$g(x) = \sqrt{9 - x^2} = (9 - x^2)^{1/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{(9 - x^2)^{1/2}} = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}.$$
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$
$$g'(x) = 0 \text{ cuando } x = 0.$$

Además $g'(x)$ existe sólo cuando

$$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{3^2} \Leftrightarrow |x| < 3.$$

Es decir, $g'(x)$ existe cuando $-3 < x < 3$.

Con esta información se generan los intervalos $(-3, 0)$ y $(0, 3)$, donde se determina el signo de $g'(x)$.

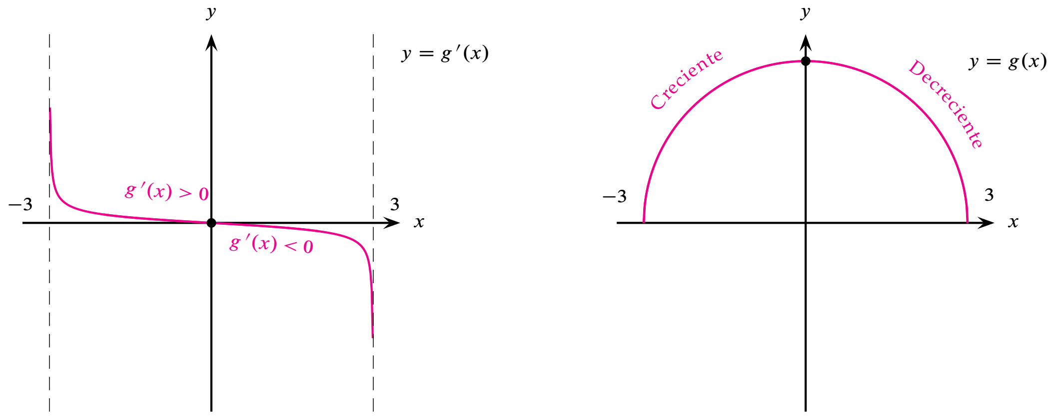
Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo de $g'(x)$*	*La función g es*
$-3 < x < 0$	$x = -1$	$+$	creciente
$0 < x < 3$	$x = 2$	$-$	decreciente

Otra forma de resolver el ejercicio:

El signo de $g'(x)$ lo da $-x$, luego:

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \;\&\; x \in (-3, 3)$, es decir, $x \in (-3, 0)$ donde $g(x)$ es creciente;

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0 \;\&\; x \in (-3, 3)$, esto es, que $g(x)$ es decreciente en $(0, 3)$.



Todo concuerda con el hecho de la función g es par, de hecho su gráfica es la semicircunferencia superior de centro en el origen y radio 3 (incluyendo sus extremos). □

9. $h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$.

▼

$$h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x} = x^{4/3} - 4x^{1/3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}\left(x^{1/3} - \frac{1}{x^{2/3}}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{x^{2/3}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1\,.$$

Además $h'(x)$ no existe cuando $x = 0$.

En función de esto se generan los intervalos $(-\infty, 0)\,, (0, 1)$ y $(1, +\infty)$, donde se determina el signo de $h'(x)$.

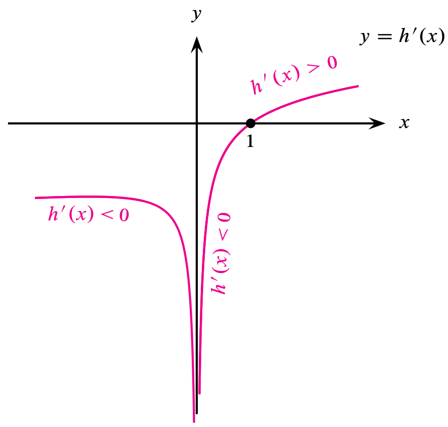
Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo de $h'(x)$*	*La función h es*
$-\infty < x < 0$	$x = -1$	$-$	decreciente
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{2}$	$-$	decreciente
$1 < x < +\infty$	$x = 2$	$+$	creciente

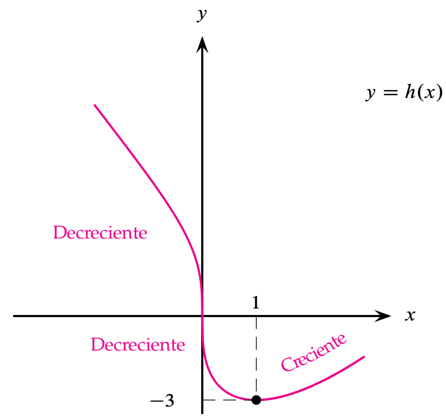
Otra forma de analizar el problema:

De hecho el signo de $h'(x)$ en $\mathbb{R} - \{0\} = D_{h'}$ lo da $x - 1$, por lo que

$$h(x) \text{ es creciente } \Leftrightarrow h'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)\,;$$
$$h(x) \text{ es decreciente } \Leftrightarrow h'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0, x \neq 0 \Leftrightarrow x < 1, x \neq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \text{ o bien } x \in (0, 1)\,.$$

En realidad $h(x)$ es decreciente en $(-\infty, 1)$, pues en $(-\infty, 0)\,, h(x) = x^{1/3}(x - 4)$ es positiva, $h(0) = 0$ y en $(0, 1)$ es negativa.





□

10. $f(x) = x^3 + \dfrac{48}{x}$.

▼

$$f(x) = x^3 + \frac{48}{x} = x^3 + 48x^{-1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 48x^{-2} = 3x^2 - \frac{48}{x^2} = \frac{3x^4 - 48}{x^2} = \frac{3(x^4 - 16)}{x^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{3(x^4 - 16)}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 - 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 2 \,.$$

Además $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$.

Con esta información se generan los intervalos $(-\infty, -2)\,, (-2, 0)\,, (0, 2)$ y $(2, +\infty)$, donde se determina el signo de $f'(x)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	*Signo de $f'(x)$*	*La función f es*
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$+$	creciente
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$-$	decreciente
$0 < x < 2$	$x = 1$	$-$	decreciente
$2 < x < +\infty$	$x = 4$	$+$	creciente

Otra forma de resolver el ejercicio:

El signo de $f'(x)$ en su dominio $D_f = D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$ lo da $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$.

Como $x^2 + 4 > 0$:

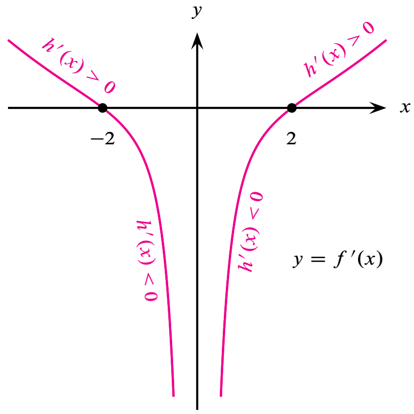
$f(x)$ es creciente si

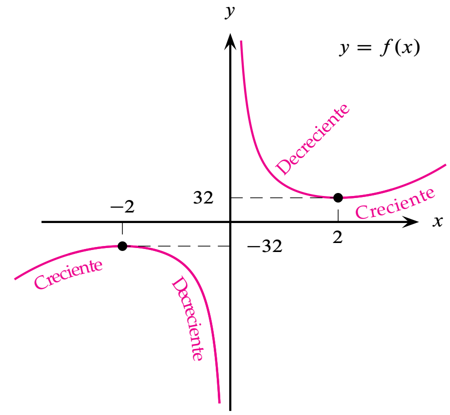
$$x^2 - 4 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 > 4 \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| > 2 \;\Leftrightarrow\; x > 2 \text{ o bien } x < 2;$$

$f(x)$ es decreciente si

$$x^2 - 4 < 0 \,\&\, x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 < 4 \,\&\, x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| < 2 \,\&\, x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (-2, 0) \text{ o bien } x \in (0, 2)\,.$$

Todo concuerda con que $h(x)$ es una función impar.





□

8.2 Máximos y mínimos locales

Ejercicios 8.2.1 *Utilizando el criterio de la primera derivada, determinar los máximos y mínimos locales o relativos de las siguientes funciones:*

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

▼ Por el ejercicio 1 de la página 341, se sabe que:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \ \& \ f'(x) = 2x - 4\,;$$

f es creciente en el intervalo $(2, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$.

Ahora bien,

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 2x - 4 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 2.$$

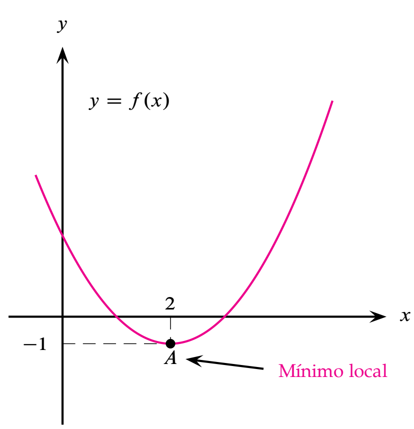
Entonces f tiene un sólo punto crítico en $x = 2$.

Por ser f decreciente para $x < 2$ & creciente para $x > 2$, se puede afirmar que f tiene en $x = 2$ un mínimo local estricto.

La ordenada de este punto mínimo es

$$y = f(2) = 2^2 - 4(2) + 3 = -1.$$

Por lo tanto, la función f tiene un mínimo local estricto en el punto $A(2, -1)$.



El mínimo local estricto resulta ser mínimo absoluto y es el vértice de la parábola $y = x^2 - 4x + 3$.

□

2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

▼ Por el ejercicio 2 de la página 342, se sabe que:

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \;\&\; g'(x) = 3x^2 - 12x + 9;$$

g es creciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(3, +\infty)$, y decreciente en el intervalo $(1, 3)$.

Además

$$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1 \text{ o bien } x = 3.$$

Entonces g tiene dos puntos críticos: en $x = 1$ y en $x = 3$.

Por ser g creciente para $x < 1$ cerca de 1 y decreciente para $x > 1$ cerca de 1, se puede asegurar que g tiene en $x = 1$ un máximo local estricto.

La ordenada de este punto es:

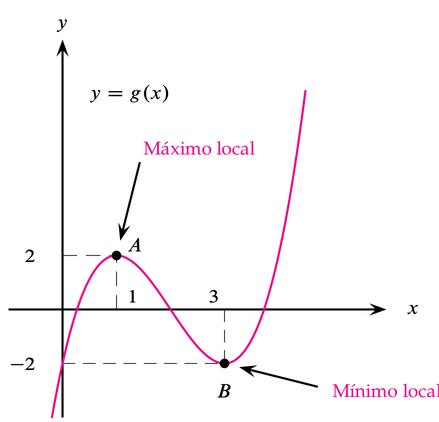
$$y = g(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 2 = 2.$$

Por ser g decreciente para $x < 3$ cerca de 3 y creciente para $x > 3$ cerca de 3, se puede afirmar que g tiene en $x = 3$ un mínimo local estricto.

La ordenada de este punto es: $y = g(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 2 = -2$.

Por lo tanto:

a. La función g tiene un máximo local estricto en el punto $A(1, 2)$.
b. La función g tiene un mínimo local estricto en el punto $B(3, -2)$.



□

3. $h(x) = -2x^3 + 6x - 1$.

▼ Por el ejercicio 3 de la página 342, se sabe que:

$$h(x) = -2x^3 + 6x - 1 \;\&\; h'(x) = -6x^2 + 6;$$

h es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, y es creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

Además

$$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1.$$

Entonces h tiene dos puntos críticos: en $x = -1$ y en $x = 1$.

Como cerca de -1, h es decreciente para $x < -1$ y creciente para $x > -1$, se puede asegurar que h tiene en $x = -1$ un mínimo local estricto.

La ordenada de este punto es

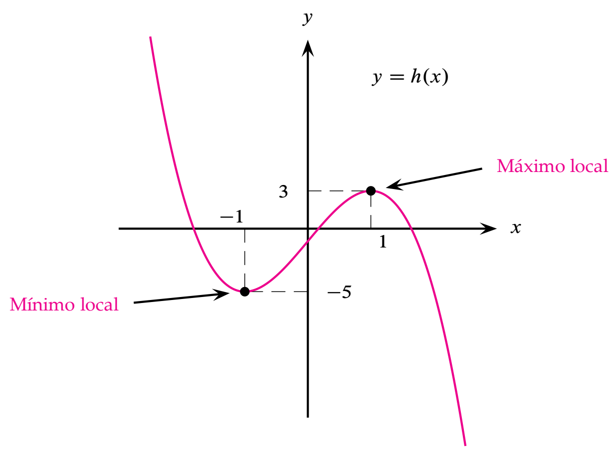
$$y = h(-1) = -2(-1)^3 + 6(-1) - 1 = -5.$$

Como cerca de 1, h es creciente para $x < 1$ y decreciente para $x > 1$, se puede afirmar que h tiene en $x = 1$ un máximo local estricto.

La ordenada de este punto es

$$y = h(1) = -2(1)^3 + 6(1) - 1 = 3.$$

Resumiendo: la función h tiene un mínimo local estricto en el punto $A(-1, -5)$ y tiene un máximo local estricto en el punto $B(1, 3)$.



□

4. $f(x) = x^4 - 4x^3$.

▼ Por el ejercicio 4 de la página 343, se sabe que:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \;\&\; f'(x) = 4x^3 - 12x^2;$$

f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 3)$ y es creciente en el intervalo $(3, +\infty)$.

Además

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\&\; x = 3.$$

Entonces f tiene dos puntos críticos: en $x = 0$ y en $x = 3$.

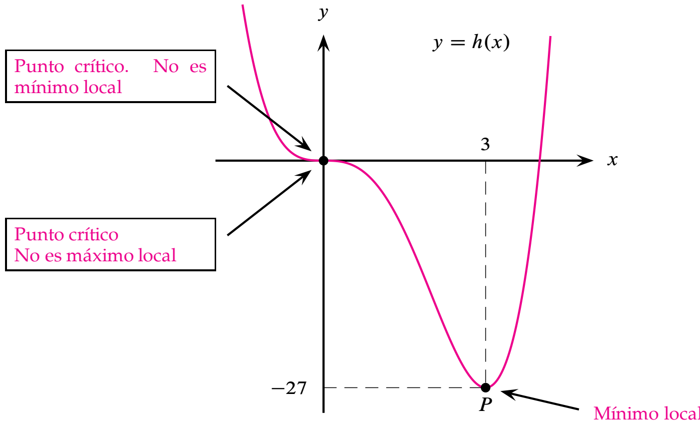
Por ser f decreciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$ cerca de 0, se puede afirmar que en $x = 0$ la función f no tiene un mínimo local ni un máximo local.

Por ser f decreciente para $x < 3$ y creciente para $x > 3$ cerca de 3, se puede asegurar que la función f tiene en $x = 3$ un mínimo local estricto.

La ordenada de este punto mínimo es

$$y = f(3) = (3)^4 - 4(3)^3 = -27.$$

Por lo tanto, la función f tiene un mínimo local estricto en el punto $P(3, -27)$ y no tiene máximos locales.



□

5. $g(x) = (x^2 - 1)^2$.

▼ Por el ejercicio 5 de la página 344, se sabe que:

$$g(x) = (x^2 - 1)^2 \ \& \ g'(x) = 4x(x^2 - 1);$$

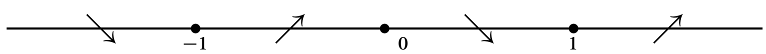
g es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, y creciente en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$.

Además

$$g'(x) = 0 \text{ cuando } x = 0 \text{ o bien } x = -1, \text{ o bien } x = 1.$$

Entonces g tiene tres puntos críticos: en $x = -1$, en $x = 0$ y en $x = 1$.

Considerando el crecimiento ($\nearrow$) y el decrecimiento ($\searrow$) de la función g en el siguiente esquema



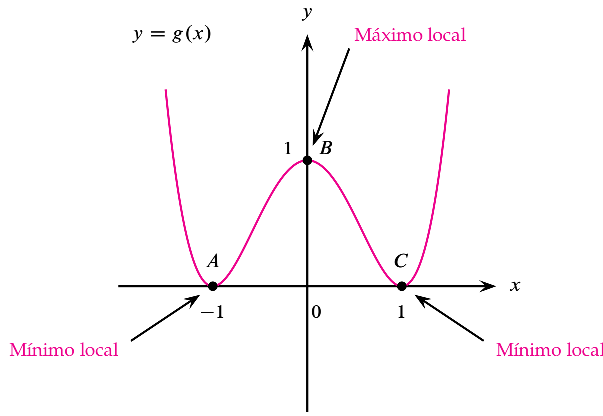
podemos afirmar que la función g tiene

- en $x = -1$ un mínimo local estricto;
- en $x = 0$ un máximo local estricto;
- en $x = 1$ un mínimo local estricto.

Las coordenadas de estos puntos críticos son:

$$\begin{aligned} A[-1, f(-1)] &= A(-1, 0) \quad \text{mínimo local estricto;} \\ B[0, f(0)] &= B(0, 1) \quad \text{máximo local estricto;} \\ C[1, f(1)] &= C(1, 0) \quad \text{mínimo local estricto.} \end{aligned}$$

Lo cual concuerda con que g sea par.



□

6. $h(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$.

▼ Por el ejercicio 6 de la página 344, se sabe que:

$$h(x) = x^2 + \frac{16}{x} \; \& \; h'(x) = 2x - \frac{16}{x^2};$$

h es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, 2)$, y es creciente en el intervalo $(2, +\infty)$.

Además

$$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2.$$

Entonces h tiene un punto crítico en $x = 2$.

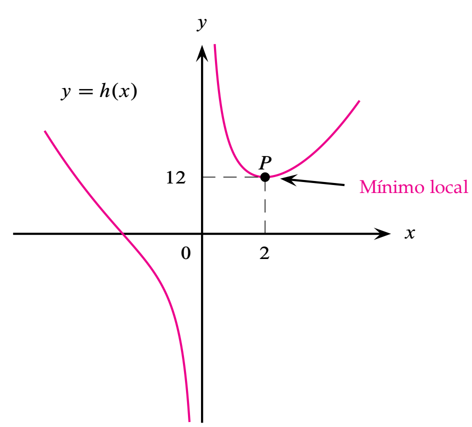
Por ser h decreciente para $x < 2$ y creciente para $x > 2$ cerca de 2, se puede asegurar que en $x = 2$ la función h tiene un mínimo local estricto.

La ordenada de este punto es

$$y = h(2) = 2^2 + \frac{16}{2} = 12.$$

Además, $h'(x)$ no existe para $x = 0$. Pero debido a que $x = 0$ no está en el dominio de la función h, sucede que en $x = 0$ no se tiene un punto crítico.

Por lo tanto, la función h tiene solamente un punto crítico que es un mínimo local estricto y se encuentra en el punto $P(2, 12)$.



□

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

▼ Por el ejercicio 7 de la página 345, se sabe que:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \;\&\; f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2};$$

f es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-2, 0)$, y es decreciente en los intervalos $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Además

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Entonces f tiene un punto crítico en $x = 0$.

Por ser f creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$ cerca de cero, se puede afirmar que en $x = 0$ la función f tiene un máximo local estricto.

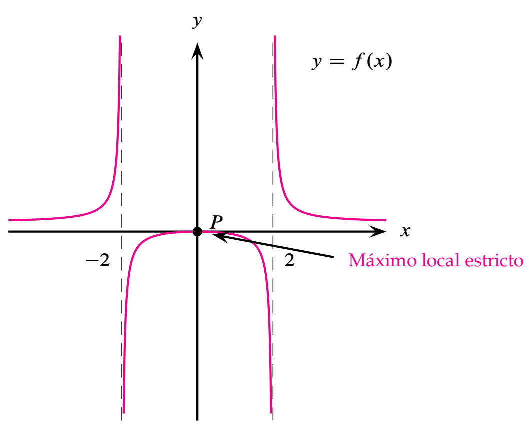
La ordenada de este punto es

$$y = f(0) = \frac{0^2}{0^2-4} = 0.$$

Además, $f'(x)$ no existe para $x = -2$ ni para $x = 2$. Pero debido a que $x = -2$ & $x = 2$ no están en el dominio de la función f, sucede que f no tiene puntos críticos en dichos números.

Por lo tanto, la función f tiene sólo un punto crítico en $P(0, 0)$ y es un máximo local estricto.

La información anterior concuerda con que $f(x)$ es par.



□

8. $g(x) = \sqrt{9-x^2}$.

▼ Por el ejercicio 8 de la página 346, se sabe que:

$$g(x) = \sqrt{9-x^2} \;\&\; g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}};$$

g es creciente en el intervalo $(-3, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, 3)$.

Además

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Entonces g tiene un punto crítico en $x = 0$.

Por ser g creciente para $x < 0$ y decreciente para $x > 0$, se puede asegurar que en $x = 0$ la función g tiene un máximo local estricto.

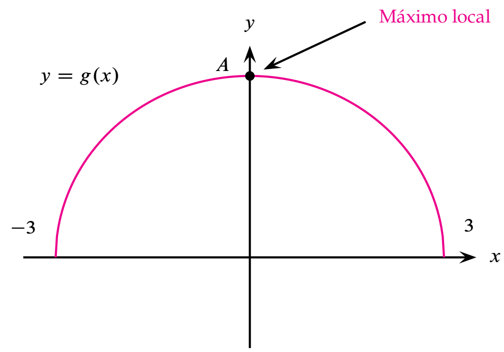
La ordenada de este punto es

$$y = g(0) = \sqrt{9-0^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Además, $g'(x)$ no existe para $x = -3$ ni para $x = 3$. Entonces en $x = -3$ y en $x = 3$ la función g tiene puntos críticos.

Por lo tanto, la función g tiene puntos críticos en $A(0, 3)$ que es un máximo local estricto, en $B(-3, 0)$ y en $C(3, 0)$ donde tiene mínimos locales estrictos.

El máximo local resulta ser máximo absoluto y los mínimos locales resultan ser también absolutos.



□

9. $h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x}$.

▼ Por el ejercicio 9 de la página 347, se sabe que:

$$h(x) = \sqrt[3]{x^4} - 4\sqrt[3]{x} \;\&\; h'(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right);$$

h es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y es creciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

Además

$$h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1;$$

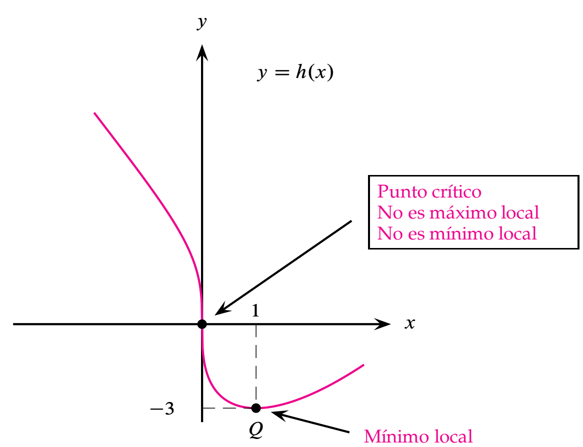
$h'(x)$ no existe en $x = 0$, que es un número del dominio de la función h.

Entonces la función h tiene dos puntos críticos: en $x = 0$ y en $x = 1$.

Por ser h decreciente para $x < 0$ y también decreciente para $x > 0$ (cerca de cero), se puede asegurar que en $x = 0$, la función h no tiene un mínimo local ni un máximo local estricto.

Por ser h decreciente para $x < 1$ y creciente para $x > 1$ (cerca de uno), se puede afirmar que en $x = 1$ la función h tiene un mínimo local estricto.

La ordenada de este punto es $y = h(1) = \sqrt[3]{1^4} - 4\sqrt[3]{1} = -3$. Por lo tanto, la función h tiene sólo un punto crítico en $Q(1, -3)$ y es un mínimo local estricto.



□

10. $f(x) = x^3 + \dfrac{48}{x}$.

▼ Por el ejercicio 10 de la página 348, se sabe que:

$$f(x) = x^3 + \frac{48}{x} \;\&\; f'(x) = \frac{3x^4 - 48}{x^2};$$

f es creciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$, y es decreciente en los intervalos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$. Además

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

La función f' no está definida en $x = 0$, que es un número que tampoco está en el dominio de la función f.

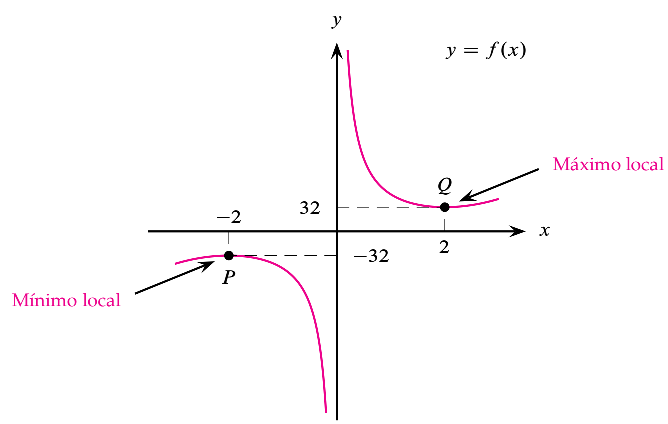
Entonces la función f tiene dos puntos críticos: en $x = -2$ y en $x = 2$.

Por ser f creciente para $x < -2$ y decreciente para $x > -2$ (cerca de -2), se puede afirmar que en $x = -2$ la función f tiene un máximo local estricto.

Por ser f decreciente para $x < 2$ y creciente para $x > 2$ (cerca de 2), se asegura que en $x = 2$ la función f tiene un mínimo local estricto.

Por lo tanto, la función f tiene un

- máximo local estricto en el punto $P[-2, f(-2)] = P(-2, -32)$;
- mínimo local estricto en el punto $Q[2, f(2)] = Q(2, 32)$.



Lo anterior concuerda con que la función f es impar. □

8.3 Concavidad y convexidad

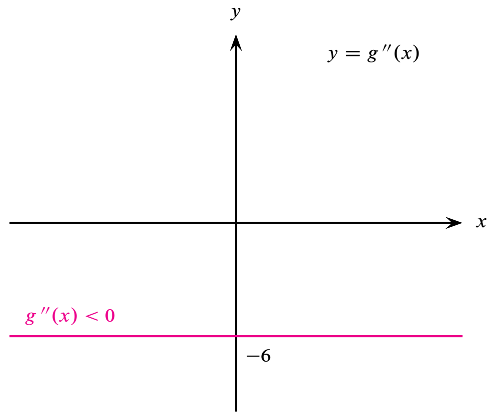
Ejercicios 8.3.1 *Determinar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de las siguientes funciones:*

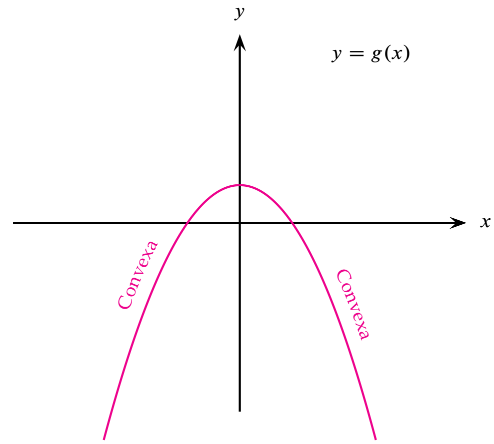
1. $g(x) = 4 - 3x^2$.

▼ $g(x) = 4 - 3x^2 \Rightarrow g'(x) = -6x \Rightarrow g''(x) = -6.$

Como $g''(x) = -6$ para cada real x, entonces $g''(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, la función g es convexa, es decir, cóncava hacia abajo en todo su dominio.





□

2. $f(x) = (x-1)^3$.

▼ $f(x) = (x-1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x-1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x-1)$.

Concavidad (concavidad hacia arriba)

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x-1) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

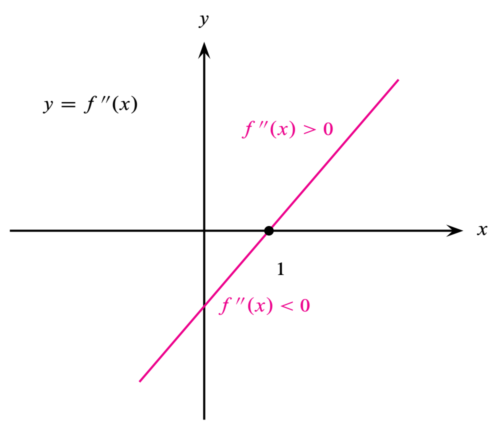
Convexidad (concavidad hacia abajo)

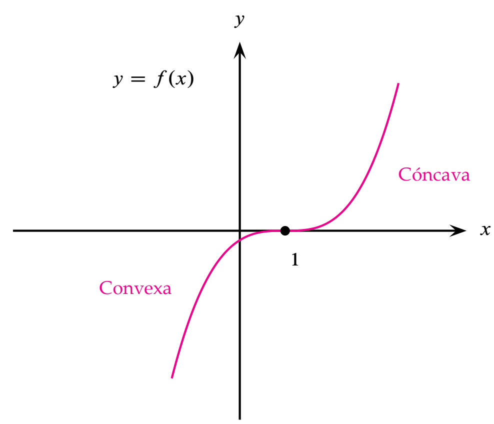
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6(x-1) < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

La función f es cóncava (hacia arriba) en el intervalo $(1, +\infty)$ y es convexa (cóncava hacia abajo) en el intervalo $(-\infty, 1)$.

La función f tiene en $x = 1$ un cambio de concavidad y además f es continua ahí, por lo tanto f tiene en $x = 1$ un punto de inflexión. Las coordenadas del punto de inflexión son:

$$I[1, f(1)] = I(1, 0).$$





□

3. $h(x) = x^4 - 6x^2 + 9$.

▼ $h(x) = x^4 - 6x^2 + 9 \Rightarrow h'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow h''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$.

Concavidad (concavidad hacia arriba)

$$h''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |\,x\,| > 1; h''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ o bien } x > 1.$$

Convexidad (concavidad hacia abajo)

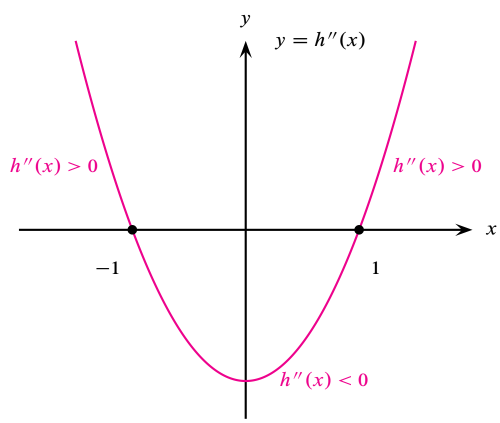
$$h''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; 12x^2 - 12 < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 < 1 \;\Leftrightarrow\; |\,x\,| < 1 \;\Leftrightarrow\; -1 < x < 1.$$

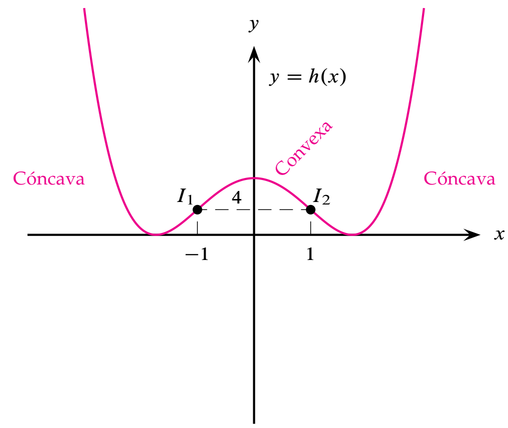
La función h es cóncava (hacia arriba) en el conjunto $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y es convexa o cóncava hacia abajo en el intervalo $(-1, 1)$.

La función h tiene cambios de concavidad en $x = -1$ y en $x = 1$ donde además es continua. Por lo tanto h tiene puntos de inflexión en $x = -1$ y en $x = 1$. Las coordenadas de los puntos de inflexión son:

$$I_1[-1, h(-1)] = I_1(-1, 4) \;\&\; I_2[1, h(1)] = I_2(1, 4).$$

Lo anterior es natural, pues h es una función par.





□

4. $\phi(x) = x^6 - 3x^4$.

▼ $\phi(x) = x^6 - 3x^4 \;\Rightarrow\; \phi'(x) = 6x^5 - 12x^3 \;\Rightarrow\; \phi''(x) = 30x^4 - 36x^2.$

Para determinar donde $\phi''(x) > 0$ y donde $\phi''(x) < 0$, primero vemos donde $\phi''(x) = 0$ y luego construimos una tabla con los intervalos obtenidos al eliminar los puntos donde $\phi''(x) = 0$.

$$\begin{aligned}\phi''(x) = 0 \;&\Leftrightarrow\; 30x^4 - 36x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 6x^2(5x^2 - 6) = 0 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; 6x^2 = 0 \text{ o bien } 5x^2 - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x^2 = 0 \text{ o bien } x^2 = \frac{6}{5} = 1.2 \;\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ o bien } x = \pm\sqrt{1.2};\end{aligned}$$

$\phi''(x) = 0$ cuando $x = -\sqrt{1.2}$, cuando $x = 0$ y cuando $x = \sqrt{1.2}$.

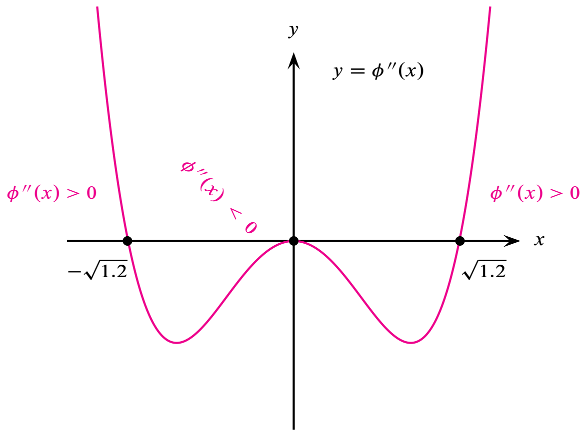
Con esta información se generan los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{1.2}\right)$; $\left(-\sqrt{1.2}, 0\right)$; $\left(0, \sqrt{1.2}\right)$ y $\left(\sqrt{1.2}, +\infty\right)$.

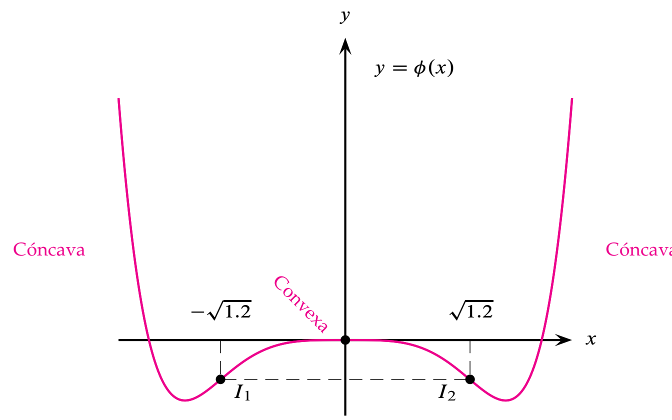
Intervalo	*Número de prueba*	*Signo de $\phi''(x)$*	*Concavidad de la función*
$-\infty < x < -\sqrt{1.2}$	$x = -2$	$+$	hacia arriba
$-\sqrt{1.2} < x < 0$	$x = -1$	$-$	hacia abajo
$0 < x < \sqrt{1.2}$	$x = 1$	$-$	hacia abajo
$\sqrt{1.2} < x < +\infty$	$x = 2$	$+$	hacia arriba

Por lo tanto, la función ϕ es cóncava (hacia arriba) en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{1.2}\right)$ y $\left(\sqrt{1.2}, +\infty\right)$, y es convexa (cóncava hacia abajo) en el intervalo $\left(-\sqrt{1.2}, \sqrt{1.2}\right)$.

La función ϕ tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{1.2}$ y en $x = \sqrt{1.2}$. Las coordenadas de estos puntos son:

$$I_1[-\sqrt{1.2}, \phi(-\sqrt{1.2})] = I_1(-\sqrt{1.2}, -2.6) \ \& \ I_2[\sqrt{1.2}, \phi(\sqrt{1.2})] = I_2(\sqrt{1.2}, -2.6).$$





□

5. $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2 + 1}$.

▼

$$f(x) = \frac{-2x}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1)(-2) - (-2x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x^2+1)^2(4x) - 2(x^2-1)2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4x(x^2+1)[x^2+1-2x^2+2]}{(x^2+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Obtenemos primero donde $f''(x) = 0$ para luego ver si hay valores de x donde $f''(x)$ no exista.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x(3-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x^2 = 3;$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = \pm\sqrt{3}.$$

Además $x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow f''(x)$ existe para cada $x \in \mathbb{R}$.

Con esta información se generan los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{3}\right)$ y $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

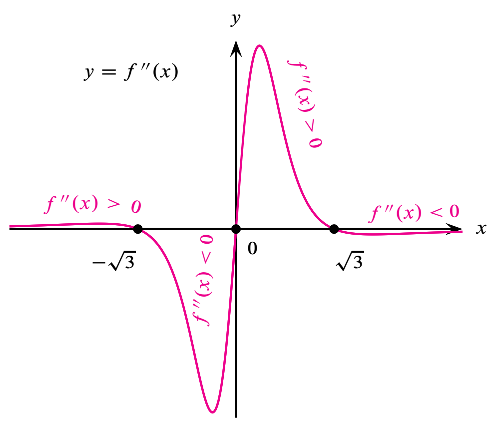
Intervalo	*Número de prueba*	*Signo de $f''(x)$*	*Concavidad de la función*
$-\infty < x < -\sqrt{3}$	$x = -2$	$+$	hacia arriba
$-\sqrt{3} < x < 0$	$x = -1$	$-$	hacia abajo
$0 < x < \sqrt{3}$	$x = 1$	$+$	hacia arriba
$\sqrt{3} < x < +\infty$	$x = 2$	$-$	hacia abajo

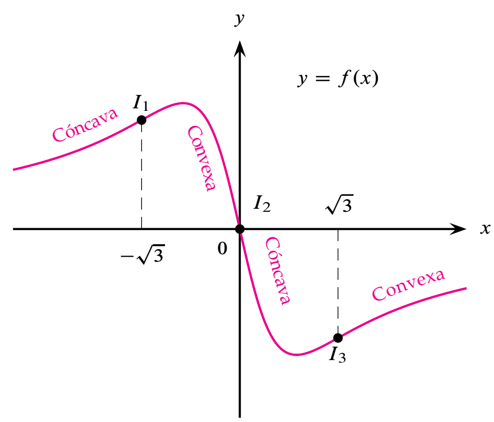
Por lo tanto, la función f es cóncava (hacia arriba) en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ y $\left(0, \sqrt{3}\right)$ y es convexa (cóncava hacia abajo) en los intervalos $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

La función f tiene puntos de inflexión en $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ y en $x = \sqrt{3}$. Las coordenadas de estos puntos son:

$$I_1[-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})] = I_1(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2});$$
$$I_2[0, f(0)] = I_2(0, 0);$$
$$I_3[\sqrt{3}, f(\sqrt{3})] = I_3(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Todo concuerda con que la función f es impar.





□

6. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

▼

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(x^2-4)2x - x^2(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g''(x) = \frac{(x^2-4)^2(-8) - (-8x)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-8(x^2-4)[(x^2-4) - 4x^2]}{(x^2-4)^4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g''(x) = \frac{-8(-3x^2-4)}{(x^2-4)^3} = \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

Vemos primero donde $g''(x) = 0$ para luego determinar los valores de x donde $g''(x)$ no existe.

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4 = 0, \text{ lo que nunca sucede.}$$

La función g'' no existe cuando $x^2 - 4 = 0$, esto es, cuando $x = \pm 2$.

Con esto generamos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$.

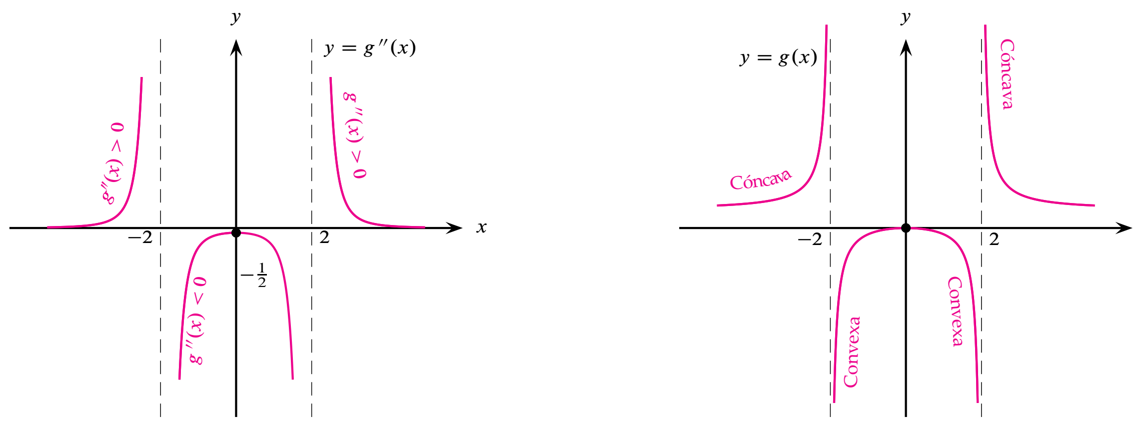
Obtenemos el signo de $g''(x)$ en cada intervalo.

Intervalo	*Número de prueba*	*Signo de $g''(x)$*	*Concavidad de la función*
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$+$	hacia arriba
$-2 < x < 2$	$x = 0$	$-$	hacia abajo
$2 < x < +\infty$	$x = 3$	$+$	hacia arriba

La función g es cóncava (hacia arriba) en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$, y es convexa (cóncava hacia abajo) en el intervalo $(-2, 2)$.

La función tiene cambios de concavidad en $x = -2$ y en $x = 2$, pero en ellos no está definida. Por lo tanto, la función no tiene puntos de inflexión.

Lo cual concuerda con que $g(x)$ es una función par.



□

7. $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.

▼

$$h(x) = x^2 + \frac{8}{x} = x^2 + 8x^{-1} \Rightarrow h'(x) = 2x - 8x^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h''(x) = 2 + 16x^{-3} = 2 + \frac{16}{x^3} = \frac{2x^3 + 16}{x^3} = \frac{2(x^3 + 8)}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^3 + 8)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

La función h'' no está definida cuando $x = 0$.

Considerando lo anterior generamos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(2, 0)$ y $(0, +\infty)$

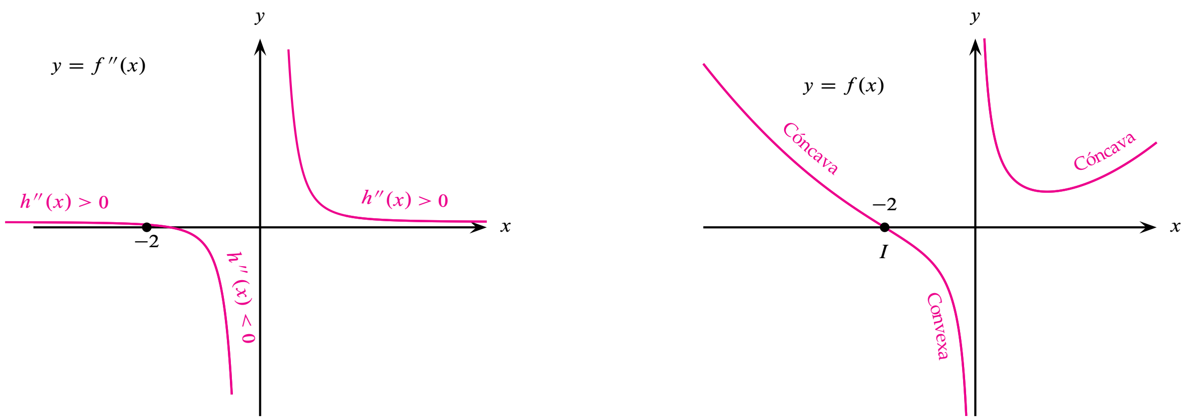
Obtenemos el signo de $h''(x)$ en cada intervalo.

Intervalo	*Número de prueba*	*Signo de $h''(x)$*	*Concavidad de la función*
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$+$	hacia arriba
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$-$	hacia abajo
$0 < x < +\infty$	$x = 1$	$+$	hacia arriba

La función h es cóncava (hacia arriba) en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(0, +\infty)$, y convexa (cóncava hacia abajo) en el intervalo $(-2, 0)$.

La función tiene cambios de concavidad en $x = -2$ y en $x = 0$, pero sólo es continua en $x = -2$ ya que $h(x)$ no existe para $x = 0$. Por lo tanto h tiene un sólo punto de inflexión en $x = -2$. Las coordenadas de este punto son:

$$I[-2, h(-2)] = I(-2, 0).$$



□

8. $\phi(x) = x^{5/3} - x^{2/3}$.

▼

$$\phi(x) = x^{5/3} - x^{2/3} \Rightarrow \phi'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{2}{3}x^{-1/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{2}{9}x^{-4/3} = \frac{2}{9}\left(\frac{5}{x^{1/3}} + \frac{1}{x^{4/3}}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{5x+1}{x^{4/3}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(5x+1)}{9x^{4/3}} = 0 \Leftrightarrow 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}.$$

La función ϕ'' no está definida en $x = 0$.

Con la información anterior generamos los intervalos $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$, $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ y $(0, +\infty)$

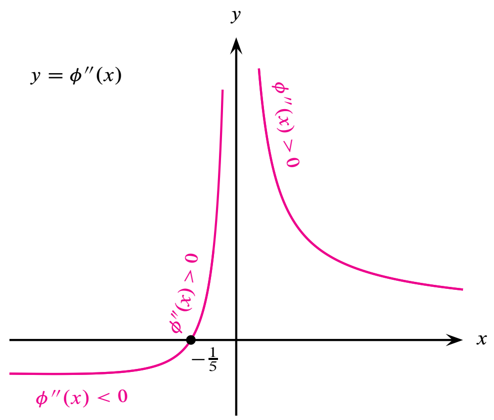
Obtenemos el signo de $\phi''(x)$ en cada intervalo.

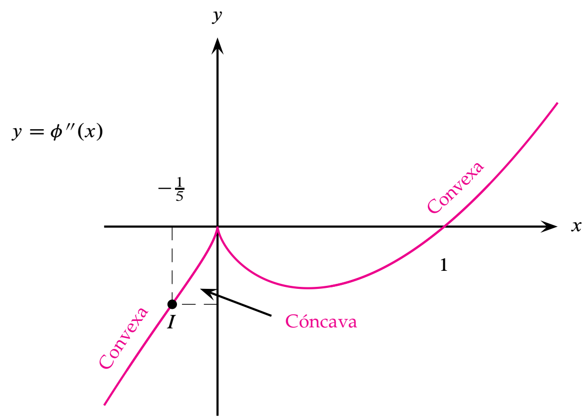
Intervalo	*Número de prueba*	*Signo de $\phi''(x)$*	*Concavidad de la función*
$-\infty < x < -\frac{1}{5}$	$x = -1$	$-$	hacia abajo
$-\frac{1}{5} < x < 0$	$x = -\frac{1}{10}$	$+$	hacia arriba
$0 < x < +\infty$	$x = 1$	$+$	hacia arriba

La función ϕ es convexa (cóncava hacia abajo) en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)$ y es cóncava (hacia arriba) en los intervalos $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ y $(0, +\infty)$.

La función ϕ sólo tiene un cambio de concavidad en $x = -\dfrac{1}{5}$, donde además es continua. Por lo tanto ϕ tiene un sólo punto de inflexión:

$$I\left[-\frac{1}{5}, \phi\left(-\frac{1}{5}\right)\right] = I\left(-\frac{1}{5}, -\frac{6}{5\sqrt[3]{25}}\right) \quad \text{[observamos que } \phi(x) = x^{2/3}(x-1)\text{]}.$$





□

9. $f(x) = x^4 - 2x^3$.

▼ $f(x) = x^4 - 2x^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x^3 - 6x^2 \;\Rightarrow\; f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$.

Concavidad (concavidad hacia arriba)

$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 12x^2 - 12x > 0 \;\Leftrightarrow\; 12x(x-1) > 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\; 12x < 0 \;\;\&\;\; x - 1 < 0 \quad \text{o bien} \quad 12x > 0 \;\;\&\;\; x - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x < 0 \;\;\&\;\; x < 1 \quad \text{o bien} \quad x > 0 \;\;\&\;\; x > 1 \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, 0) \cap (-\infty, 1) \quad \text{o bien} \quad x \in (0, +\infty) \cap (1, +\infty) \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, 0) \quad \text{o bien} \quad x \in (1, +\infty) \;\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow\; x < 0 \quad \text{o bien} \quad x > 1\,.
\end{aligned}$$

$f''(x) > 0$ en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$

Convexidad (concavidad hacia abajo)

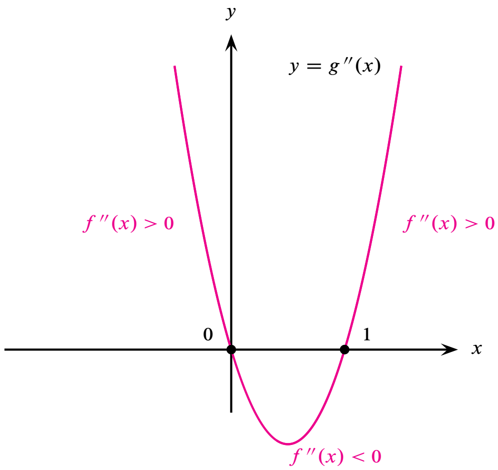
Por lo anterior se tiene que

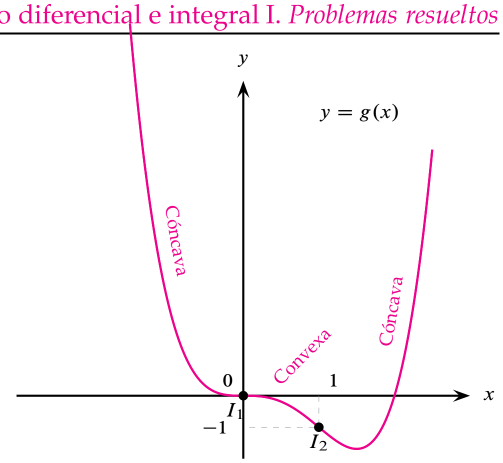
$f''(x) < 0$ en el intervalo $(0, 1)$.

Resumiendo: la función f es cóncava (hacia arriba) en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$, y es convexa en el intervalo $(0, 1)$.

La función f tiene puntos de inflexión en $x = 0$ y en $x = 1$. Las coordenadas de estos puntos son:

$$I_1 = [0, f(0)] = I_1(0, 0) \;\&\; I_2[1, f(1)] = I_2(1, -1).$$





□

10. $g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

▼

$$g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = x(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(x) = x(-\frac{1}{2})(4 - x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) + (4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{x^2 + (4 - x^2)}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} \Rightarrow$$

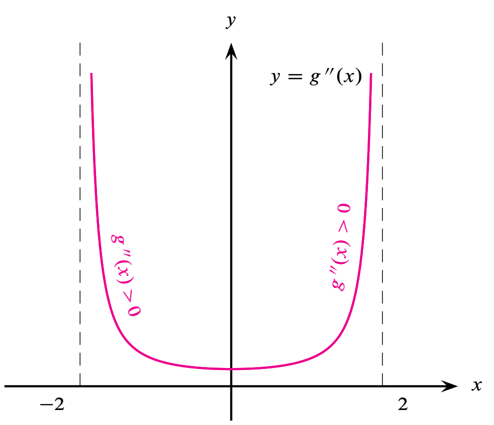
$$\Rightarrow g''(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 4 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < 2 \Leftrightarrow |\,x\,| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

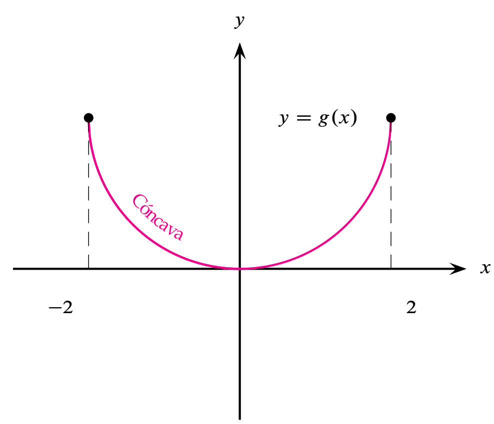
En este intervalo $g''(x) > 0$.

Por otra parte:

$$g(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq 2 \Leftrightarrow |\,x\,| \leq 2.$$

Entonces el dominio de g es $D_g = [-2, 2]$ y $g''(x) > 0$ en todo D_g excepto en los extremos ± 2, por lo cual se puede afirmar que la función g es cóncava hacia arriba en todo su dominio. La función g no tiene puntos de inflexión.





□

Ejercicios 8.3.2 *Utilizando el criterio de la segunda derivada, determinar los máximos y mínimos locales de las anteriores funciones, es decir, de:*

1. $g(x) = 4 - 3x^2$.

▼ $g(x) = 4 - 3x^2 \Rightarrow g'(x) = -6x \Rightarrow g''(x) = -6.$

Puntos críticos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

La función g tiene sólo un punto crítico: en $x = 0$.

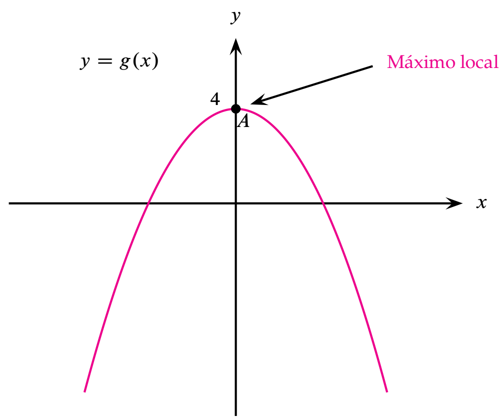
Tipo de punto crítico:

$$g''(x) = -6 \text{ para cada } x \in \mathbb{R} \Rightarrow g''(0) = -6 \Rightarrow g''(0) < 0.$$

Entonces g tiene en $x = 0$ un máximo local estricto.

Las coordenadas del punto máximo son $A[0, g(0)] = A(0, 4)$, el cual resulta ser máximo absoluto.

Lo anterior concuerda con que la función es par.



□

2. $f(x) = (x - 1)^3$.

▼ $f(x) = (x - 1)^3 \Rightarrow f'(x) = 3(x - 1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x - 1).$

Puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

La función f tiene sólo un punto crítico en $x = 1$.

Tipo de punto crítico:

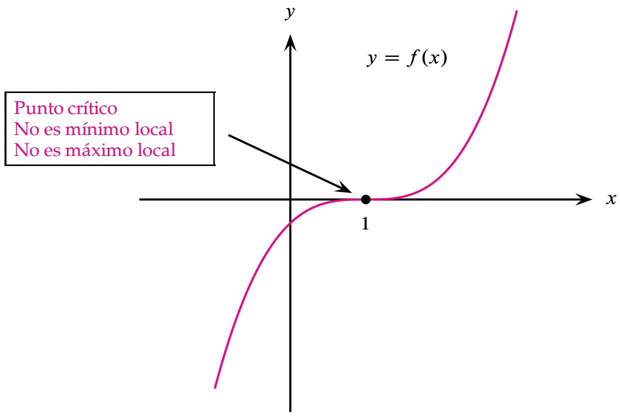
$$f''(x) = 6(x - 1) \Rightarrow f''(1) = 0.$$

Entonces, por el criterio de la segunda derivada, no podemos asegurar la existencia de un máximo ni de un mínimo en $x = 1$, puesto que $f''(1) = 0$.

Veamos ahora el criterio de la primera derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) = 3(x - 1)^2 &\Rightarrow f'(x) > 0 \text{ para cada } x \neq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(x) > 0 \text{ para } x < 1 \;\&\; f'(x) > 0 \text{ para } x > 1. \end{aligned}$$

Lo cual implica que f es creciente para $x < 1$ así como para $x > 1$. Por lo tanto el punto crítico que tiene f en $x = 1$ no es un máximo local ni tampoco un mínimo local.



□

3. $h(x) = x^4 - 6x^2 + 9$.

▼ $h(x) = x^4 - 6x^2 + 9 \Rightarrow h'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow h''(x) = 12x^2 - 12.$

Puntos críticos:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x^2 = 3;$$
$$h'(x) = 0 \text{ cuando } x = 0 \text{ o bien cuando } x = \pm\sqrt{3}.$$

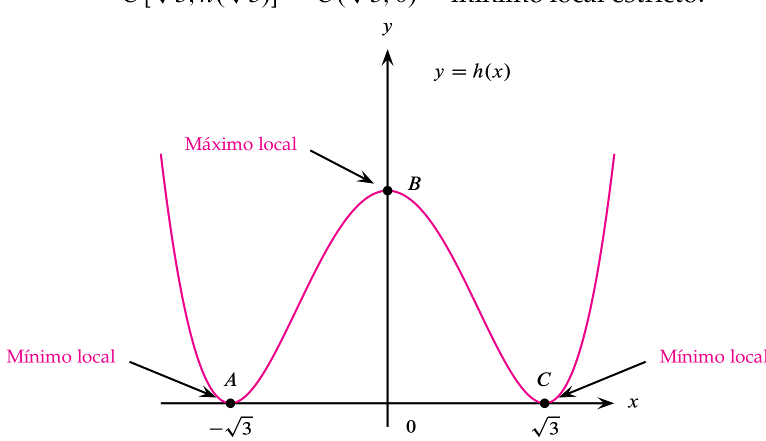
La función h tiene tres puntos críticos.

Tipos de puntos críticos:

$$h''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h''(-\sqrt{3}) = 12(3 - 1) = 24 > 0, \text{ mínimo.}$$
$$h''(0) = 12(0 - 1) = -12 < 0, \text{ máximo.}$$
$$h''(\sqrt{3}) = 12(3 - 1)24 > 0, \text{ mínimo.}$$

Las coordenadas de estos puntos críticos son:

$$A[-\sqrt{3}, h(-\sqrt{3})] = A(-\sqrt{3}, 0) \quad \text{mínimo local estricto;}$$
$$B[0, h(0)] = B(0, 9) \quad \text{máximo local estricto;}$$
$$C[\sqrt{3}, h(\sqrt{3})] = C(\sqrt{3}, 0) \quad \text{mínimo local estricto.}$$



Lo anterior concuerda con el hecho de que la función h es par. Los mínimos locales resultan ser absolutos. □

4. $\phi(x) = x^6 - 3x^4$.

▼ $\phi(x) = x^6 - 3x^4 \Rightarrow \phi'(x) = 6x^5 - 12x^3 \Rightarrow \phi''(x) = 30x^4 - 36x^2$.

Puntos críticos:

$$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^5 - 12x^3 = 0 \Leftrightarrow 6x^3(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ o bien } x^2 = 2;$$
$$\phi'(x) = 0 \text{ cuando } x = 0 \text{ o bien cuando } x = \pm\sqrt{2}.$$

La función ϕ tiene tres puntos críticos.

Tipos de puntos críticos:

$$\begin{aligned} \phi''(x) = 30x^4 - 36x^2 = 6x^2(5x^2 - 6) \Rightarrow & \\ \Rightarrow \phi''(-\sqrt{2}) = 12(10-6) = 48 > 0 \quad & \text{mínimo.} \\ \phi''(0) = 0(-6) = 0 \quad & \text{no se sabe.} \\ \phi''(\sqrt{2}) = 12(10-6) = 48 > 0 \quad & \text{mínimo.} \end{aligned}$$

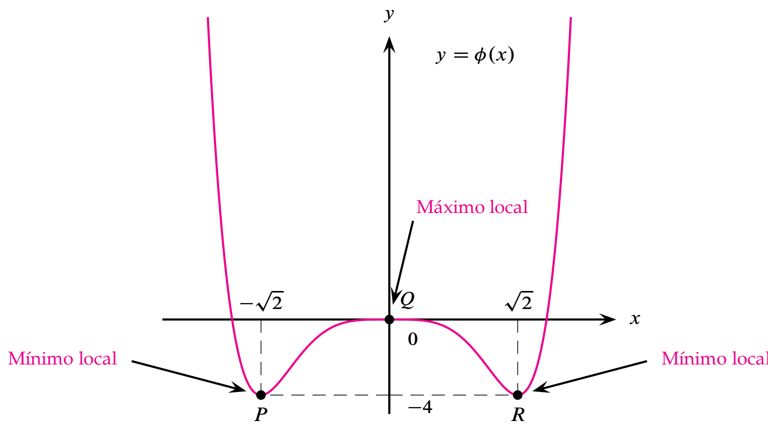
La incertidumbre que se tiene en $x = 0$ se resuelve viendo que el signo de $\phi''(x) = 6x^2(5x^2 - 6)$ lo da el factor $5x^2 - 6$. Entonces:

$$5x^2 - 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{6}{5} \Leftrightarrow |\,x\,| < \sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1.1 \Leftrightarrow -1.1 < x < 1.1\,.$$

Es decir, la función ϕ es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-1.1, 1.1)$ que contiene a $x = 0$. Entonces ϕ tiene en $x = 0$ un máximo local estricto.

Las coordenadas de estos puntos críticos son:

$$\begin{aligned} P[-\sqrt{2}, \phi(-\sqrt{2})] = P(-\sqrt{2}, -4) \quad & \text{mínimo local estricto;} \\ Q[0, \phi(0)] = Q(0, 0) \quad & \text{máximo local estricto;} \\ R[\sqrt{2}, \phi(\sqrt{2})] = R(\sqrt{2}, -4) \quad & \text{mínimo local estricto.} \end{aligned}$$



Lo cual concuerda con el hecho de ser la función ϕ par.

Los mínimos locales también son absolutos. □

5. $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2 + 1}$.

▼ Por el ejercicio 5 de la página 359 se sabe que:

$$f(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{4x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

La función f tiene dos puntos críticos.

Tipos de puntos críticos:

$$f''(x) = \frac{4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(-1) = \frac{-4(2)}{2^3} = -1 < 0 \quad \text{máximo local.}$$

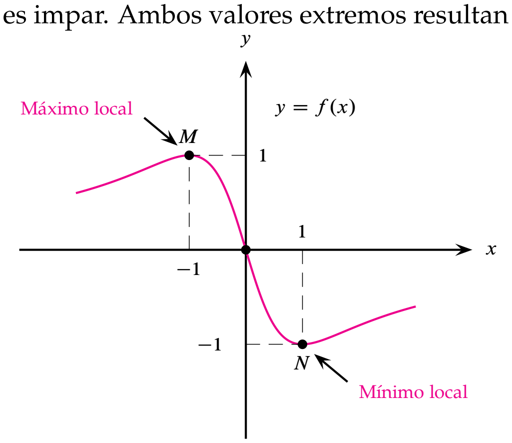
$$f''(1) = \frac{4(2)}{2^3} = 1 > 0 \quad \text{mínimo local.}$$

Las coordenadas de estos puntos críticos son:

$$M[-1, f(-1)] = M(-1, 1) \quad \text{máximo local estricto;}$$

$$N[1, f(1)] = N(1, -1) \quad \text{mínimo local estricto.}$$

Lo cual concuerda con que f es impar. Ambos valores extremos resultan ser absolutos.



□

6. $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

▼ Por el ejercicio 6 de la página 360 se sabe que:

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \Rightarrow g'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow g''(x) = \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

Puntos críticos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow -8x = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

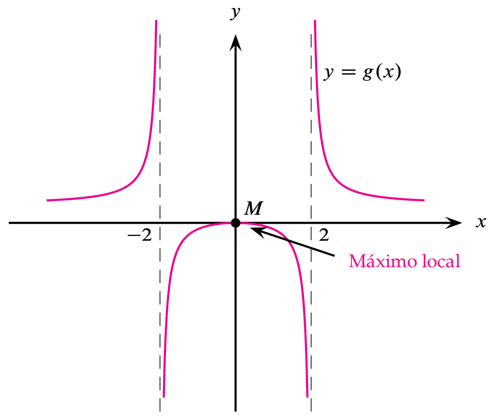
$g'(x)$ no existe cuando $x^2 - 4 = 0$, esto es cuando $x = \pm 2$. Pero $g(x)$ tampoco existe cuando $x = \pm 2$ (no están en el dominio de g). Entonces g tiene un sólo punto crítico en $x = 0$.

Tipo de punto crítico:

$$g''(0) = \frac{8(4)}{(-4)^3} = -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{máximo local.}$$

Las coordenadas de este punto crítico son:

$$M[0, g(0)] = M(0, 0) \quad \text{máximo local estricto.}$$



□

7. $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.

▼ $h(x) = x^2 + \dfrac{8}{x} \Rightarrow h'(x) = 2x - \dfrac{8}{x^2} \Rightarrow h''(x) = 2 + \dfrac{16}{x^3}$.

Puntos críticos:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4};$$

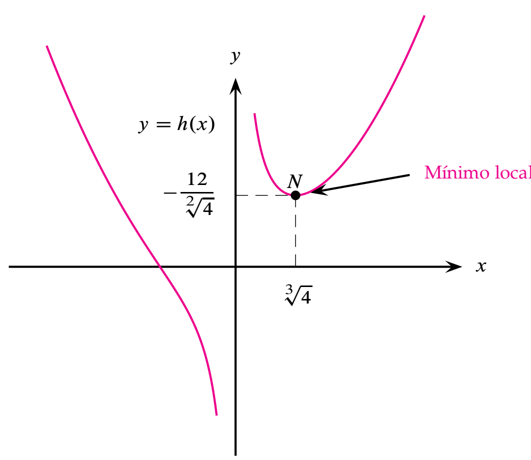
$h'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Pero $h(x)$ tampoco existe cuando $x = 0$. Entonces h tiene un sólo punto crítico en $x = \sqrt[3]{4}$.

Tipo de punto crítico:

$$h''(\sqrt[3]{4}) = 2 + \frac{16}{4} = 6 > 0 \quad \text{mínimo local.}$$

Las coordenadas de este punto crítico son:

$$N[\sqrt[3]{4}, g(\sqrt[3]{4})] = N\left(\sqrt[3]{4}, \frac{12}{\sqrt[3]{4}}\right) \quad \text{mínimo local estricto.}$$



□

8. $\phi(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$.

▼ $\phi(x) = x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \phi'(x) = \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow \phi''(x) = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{5x+1}{x^{\frac{4}{3}}}\right)$.

Puntos críticos:

$$\phi'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(5x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{5x-2}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = 0 \Leftrightarrow 5x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5};$$

$\phi'(x)$ no existe cuando $x = 0$, pero $\phi(x)$ sí está definida en $x = 0$. Entonces ϕ tiene dos puntos críticos $x = \frac{2}{5}$ & $x = 0$.

Tipos de puntos críticos:

$$\phi''\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2(3)}{9\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{4}{3}}} > 0 \quad \text{mínimo local;}$$

$$\phi''(0) = \text{ no existe,} \quad \text{nada se puede asegurar.}$$

Para decidir el tipo de punto crítico que tiene ϕ en $x = 0$, recurrimos al criterio de la primera derivada.

El signo de $\phi'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{5x-2}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$ lo dan $5x - 2$ & $x^{\frac{1}{3}}$.

Puesto que $\lim\limits_{x\to 0}(5x - 2) = -2$, entonces $5x - 2 < 0$ para valores x cerca de 0.

Ahora bien, alrededor de $x = 0$ hallamos:

$$x < 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} < 0 \Rightarrow \frac{5x-2}{x^{\frac{1}{3}}} > 0 \Rightarrow \phi'(x) > 0;$$

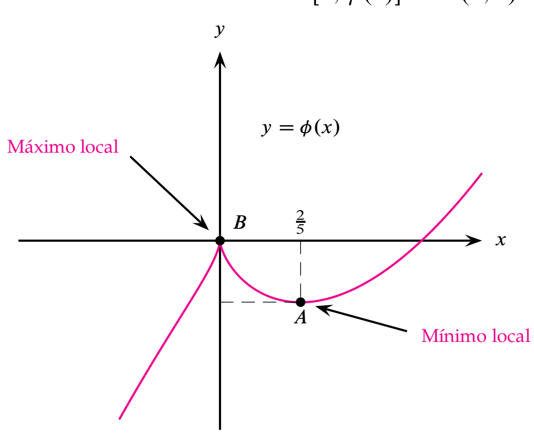
$$x > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > 0 \Rightarrow \frac{5x-2}{x^{\frac{1}{3}}} < 0 \Rightarrow \phi'(x) < 0.$$

Sucede entonces que ϕ es creciente para $x < 0$ y es decreciente para $x > 0$ (cerca de cero). Por lo tanto la función ϕ tiene en $x = 0$ un máximo local.

Las coordenadas de estos puntos críticos son:

$$A\left[\frac{2}{5}, \phi\left(\frac{2}{5}\right)\right] = A\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\right) \text{ [se observa que } \phi(x) = x^{2/3}(x-1)] \quad \text{mínimo local estricto;}$$

$$B[0, \phi(o)] = B(0, 0) \quad \text{máximo local estricto.}$$



□

9. $f(x) = x^4 - 2x^3$.

▼ $f(x) = x^4 - 2x^3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x^2 \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 12x$.

Puntos críticos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = \frac{3}{2}.$$

La función ϕ tiene dos puntos críticos.

Tipos de puntos críticos:

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1);$$
$$f''(0) = 0 \quad \text{nada se puede asegurar;}$$
$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 18\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \text{mínimo local.}$$

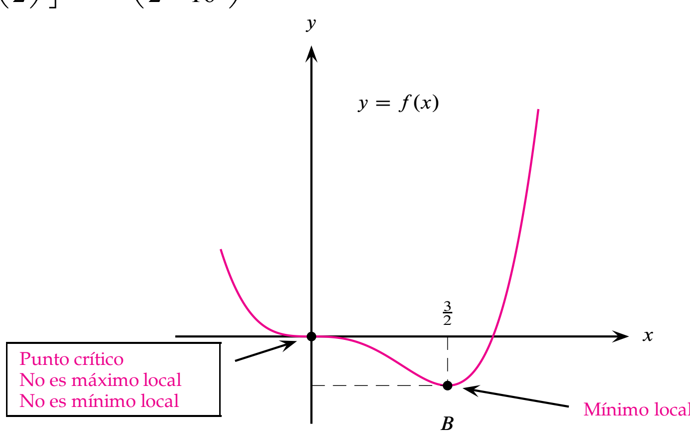
Para decidir sobre el punto crítico en $x = 0$, utilizamos el criterio de la primera derivada.

Como $f'(x) = 2x^2(2x - 3)$, y además $x^2 > 0$ para $x \neq 0$, entonces el signo de $f'(x)$ esta dado por el factor $2x - 3$.

Ahora: $2x - 3 < 0 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$. Entonces $f'(x) < 0$ para $x < \frac{3}{2}$ y para $x \neq 0$. Por lo tanto f es decreciente alrededor de $x = 0$. Con esto podemos afirmar que en $x = 0$ la función f no tiene mínimo local ni máximo local.

Las coordenadas del punto crítico son:

$$B\left[\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right] = B\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right) \text{ [observe que } f(x) = x^3(x-2)] \quad \text{mínimo local estricto.}$$



El mínimo local resulta ser absoluto. □

10. $g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$.

▼ Por el ejercicio 10 de la página 364 se sabe que:

$$g(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{x}{(4 - x^2)^{1/2}} \Rightarrow g''(x) = \frac{4}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$$

Puntos críticos.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Además $g'(x)$ no existe en $x = \pm 2$ donde $g(x)$ sí está definida, por lo que la función g tiene 3 puntos críticos.

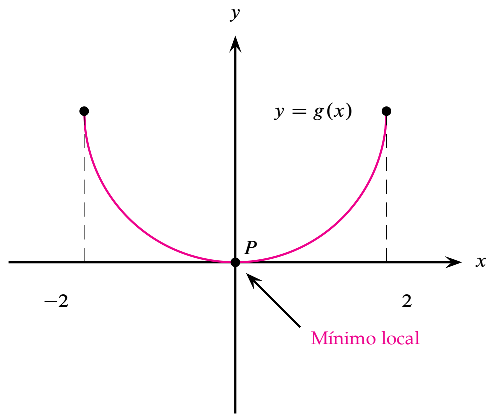
Tipo de puntos críticos:

$$g''(x) = \frac{4}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}\,.$$

$$g''(0) = \frac{4}{\sqrt{4^3}} > 0 \quad \text{mínimo local.}$$

Las coordenadas de los puntos críticos son:

$$P[0, g(0)] = P(0, 0) \quad \text{mínimo local estricto;}$$
$$Q[-2, g(-2)] = Q(-2, 2) \quad \text{máximo local estricto;}$$
$$R[2, g(2)] = R(2, 2) \quad \text{máximo local estricto.}$$



El mínimo local resulta ser absoluto y los otros dos puntos críticos resultan ser máximos absolutos.

□

CAPÍTULO

9

Gráfica de una función

9.1 Bosquejo de la gráfica de una función

Ejercicios 9.1.1 *Gráfica de una función polinomial.*

1. Sea la función $f(x) = 1 - (x-3)^3$.

   Encuentre los extremos relativos y absolutos (si tiene), los intervalos donde sea creciente y donde sea decreciente, también calcule dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Finalmente haga la gráfica.

   ▼ La función f es un polinomio

$$f(x) = 1 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 28.$$

   Calculamos sus puntos críticos

$$\begin{aligned} f'(x) = -3x^2 + 18x - 27 = -3(x^2 - 6x + 9) = 0 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0 \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; x = 3 \text{ que es el único punto crítico.} \end{aligned}$$

   Como $f'(x) = -3(x-3)^2 < 0$ si $x \neq 3$, la función f es decreciente en $\mathbb{R}$ y no tiene valores extremos.

   Analicemos su concavidad

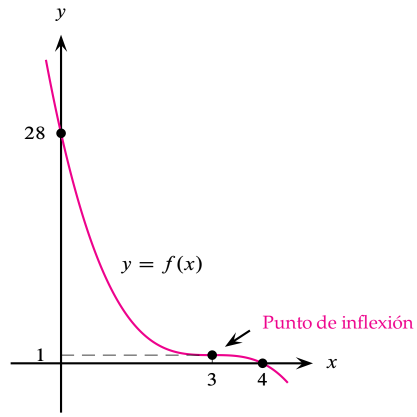
$$f''(x) = -6(x-3) \begin{cases} > 0, \\ < 0, \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} x < 3; \\ x > 3. \end{cases}$$

   Luego, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 3)$ y cóncava hacia abajo en $(3, +\infty)$.

   En $x = 3$ hay un punto de inflexión que es $(3, 1)$.

   Notemos que $f(0) = 28$ & $f(4) = 0$.

   La gráfica de f es:



□

2. Dada la función $f(x) = x^4 - 2x^3$, determinar:

   a. Puntos críticos y clasificación.
   b. Intervalos donde crece o bien decrece.
   c. Puntos de inflexión.
   d. Los intervalos de concavidad.
   e. Gráfica de f.

▼

a. Los puntos críticos serán las raíces de la derivada, esto es:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x = \frac{3}{2}.$$

Veamos cómo es la segunda derivada en ellos:

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1),$$
$$f''(0) = 0,$$

por lo que no podemos decidir si es máximo o mínimo relativo con el criterio de la segunda derivada; analicemos la primera derivada:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2};$$
$$f'(x) < 0 \text{ en } \left(-\infty, \frac{3}{2}\right).$$

Por lo que en $x = 0$ no hay valor extremo ya que en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ la función f es decreciente.

En cambio

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = 12 \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2} - 1\right) > 0.$$

Por lo que en $x = \frac{3}{2}$ la función tiene un mínimo local lo cual coincide con que la función f decrece en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

b. Acabamos de ver que la función f es decreciente en $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ y es creciente en $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

c. En $x = 0$ y en $x = 1$ hay puntos de inflexión, pues ahí la segunda derivada vale cero y cambia de signo como se puede ver en la tabla:

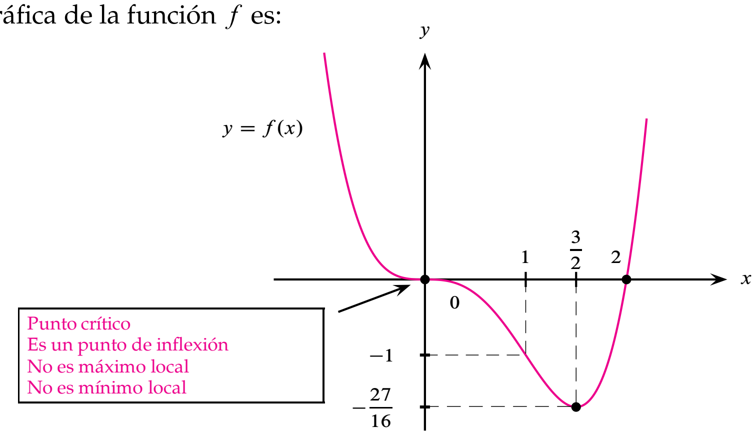
	Signo de			
Intervalo	x	$x-1$	$f''(x) = 12x(x-1)$	*f es cóncava hacia*
$x < 0\,(< 1)$	$-$	$-$	$+$	arriba
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	abajo
$(0 <)\,1 < x$	$+$	$+$	$+$	arriba

d. Como acabamos de ver, la función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$, y es cóncava hacia abajo en $(0, 1)$.

e. Tabulamos $f(x) = x^3(x-2)$ en algunos valores

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{3}{2} - 2\right) = \frac{27}{8}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{27}{16} \approx -1.6875\,;$$
$$f(0) = 0\,;$$
$$f(1) = 1^3(1-2) = 1(-1) = -1\,;$$
$$f(2) = 0\,.$$

La gráfica de la función f es:



El mínimo local $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{27}{16}\right)$ resulta ser mínimo absoluto.

□

3. Para la función $h(x) = x^4 - 8x^2 + 18$, encuentre:

a. Los intervalos en los cuales h es creciente o bien decreciente.

b. Los valores máximos y mínimos locales de h.

c. Los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Los puntos de inflexión.

d. Bosqueje la gráfica de esa función.

▼

a. Calculamos su derivada

$$h'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2)$$

y averiguamos su signo mediante la tabla siguiente:

	Signo de				
Intervalo	$x+2$	x	$x-2$	$h'(x)$	*h es*
$x < -2 (< 0 < 2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente
$-2 < x < 0 (< 2)$	$+$	$-$	$-$	$+$	creciente
$(-2 <) 0 < x < 2$	$+$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$(-2 < 0 <) 2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente

b. Los puntos críticos de la función son $-2, 0$ & 2.

En $x = -2$ la función tiene un mínimo local, pues la función ahí pasa de ser decreciente a ser creciente.
Eso mismo ocurre en $x = 2$, comprobando que la función es par; el valor mínimo es

$$h(\pm 2) = (\pm 2)^4 - 8(\pm 2)^2 + 18 = 16 - 32 + 18 = 2.$$

En $x = 0$ la función vale $h(0) = 18$ y se trata de un máximo, pues ahí la función pasa de ser creciente a ser decreciente.

c. Calculamos la segunda derivada de la función

$$h''(x) = [h'(x)]' = (4x^3 - 16x)' = 12x^2 - 16 = $$
$$= 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) = 12\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

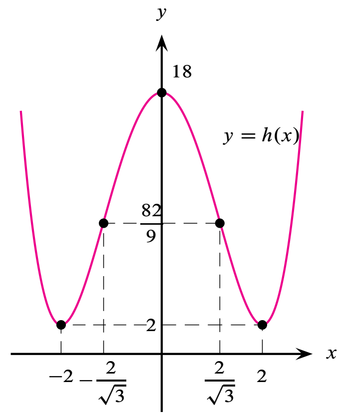
Su signo nos lo da la tabla siguiente:

	Signo de			
Intervalo	$x + \frac{2}{\sqrt{3}}$	$x - \frac{2}{\sqrt{3}}$	$h''(x)$	*h es cóncava hacia*
$x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(< \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$-$	$-$	$+$	arriba
$-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$	$+$	$-$	$-$	abajo
$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}} <\right) \frac{2}{\sqrt{3}} < x$	$+$	$+$	$+$	arriba

En $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ y en $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ la función tiene sendos puntos de inflexión, pues la curva cambia el sentido de su concavidad y es continua:

$$h\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - 8\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 18 = \frac{16}{9} - \frac{32}{3} + 18 = \frac{16 - 96 + 162}{9} = \frac{82}{9} \approx 9.\overline{1}.$$

d. Dado $\pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm 1.1547005$. La gráfica de la función h es:



Los mínimos locales resultan ser absolutos.

□

4. Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

   a. Encontrar los intervalos de monotonía de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es creciente y aquellos donde es decreciente.
   b. Encontrar los intervalos de concavidad de la función. Es decir, aquellos intervalos donde la función es cóncava hacia abajo y aquellos donde es cóncava hacia arriba.
   c. Hacer un bosquejo de la gráfica de la función.

▼

a. Derivamos
$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 3 = 3(x^2 + 4x + 1).$$

Para calcular los puntos críticos calculamos los ceros o raíces de la derivada, usando la fórmula de la cuadrática:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3} \approx \begin{cases} -0.268 \\ -3.732\,. \end{cases}$$

Con estas raíces la factorización de la derivada queda como sigue:

$$f'(x) = 3(x^2 + 4x + 1) = 3\left[x - (-2 - \sqrt{3})\right]\left[x - (-2 + \sqrt{3})\right] =$$
$$= 3(x + 2 + \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3}).$$

Para conocer los intervalos de monotonía, usamos la siguiente tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x - (-2 - \sqrt{3})$	$x - (-2 + \sqrt{3})$	$f'(x) = 3(x^2 + 4x + 1)$
$x < -2 - \sqrt{3}\,(< -2 + \sqrt{3})$	$-$	$-$	$+$
$-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}$	$+$	$-$	$-$
$x > -2 + \sqrt{3}\,(> -2 - \sqrt{3})$	$+$	$+$	$+$

Por lo tanto, la función f crece para $x \in \left(-\infty, -2 - \sqrt{3}\right)$ y para $x \in \left(-2 + \sqrt{3}, +\infty\right)$; y decrece para $x \in \left(-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right)$.

b. Calculamos la segunda derivada

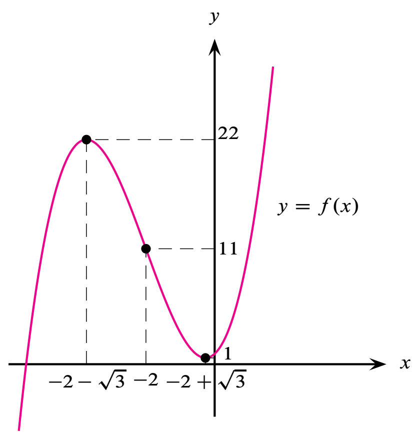
$$f''(x) = 6x + 12 = 6(x + 2).$$

La única raíz es $x = -2$ donde hay un punto de inflexión.
Se ve claro que
$f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, -2)$ o sea f es cóncava hacia abajo ahí;
$f''(x) > 0$ para $x \in (-2, +\infty)$ o sea f es cóncava hacia arriba ahí.

c. Valuamos la función en algunos puntos

x	$f(x)$
$-2 - \sqrt{3}$	21.39
-2	11
$-2 + \sqrt{3}$	0.6
0	1

y damos un bosquejo de la gráfica de la función f:



□

5. Para la función $f(x) = (x^2 - 4)^3$, determine:

a. Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. Los extremos relativos.

b. Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo. Los puntos de inflexión.

c. La gráfica.

▼ Calculemos:

a. $f'(x) = 3(x^2 - 4)^2 2x = 6x(x + 2)^2(x - 2)^2$.
Los puntos críticos están en $x = -2, 0$ y en 2.
$f'(x) > 0$ si $x > 0$ & $x \neq 2$; luego, $f(x)$ es creciente en $(0, 2)$, en $(2, +\infty)$ y también en $[0, +\infty)$.
$f'(x) < 0$ si $x < 0$ & $x \neq -2$; luego, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$, en $(-2, 0)$ y también en $(-\infty, 0)$.
Entonces el único extremo relativo es $(0, -64)$, donde la función pasa de ser decreciente a ser creciente; por lo tanto es un mínimo.

b. Calculemos la derivada de $f'(x) = 6x(x^2 - 4)^2$:

$$f''(x) = 6(x^2-4)^2 + 6x \times 2(x^2-4) \times 2x = 6(x^2-4)(x^2-4+4x^2) =$$
$$= 6(x^2-4)(5x^2-4) = 6(x+2)(x-2)(\sqrt{5}x+2)(\sqrt{5}x-2)\,.$$

La segunda derivada es 0 en ± 2 y en $\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx \pm 0.89$, y su signo está dado en la tabla siguiente:

	Signo de					
Intervalo	$x+2$	$\sqrt{5}x+2$	$\sqrt{5}x-2$	$x-2$	$f''(x)$	*f es cóncava hacia*
$x < -2 \left(< -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 2\right)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	arriba
$-2 < x < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \left(< \dfrac{2}{\sqrt{5}} < 2\right)$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	abajo
$(-2 <) -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{5}} (< 2)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	arriba
$\left(-2 < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} <\right) \dfrac{2}{\sqrt{5}} < x < 2$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	abajo
$\left(-2 < -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < \dfrac{2}{\sqrt{5}} <\right) 2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	arriba

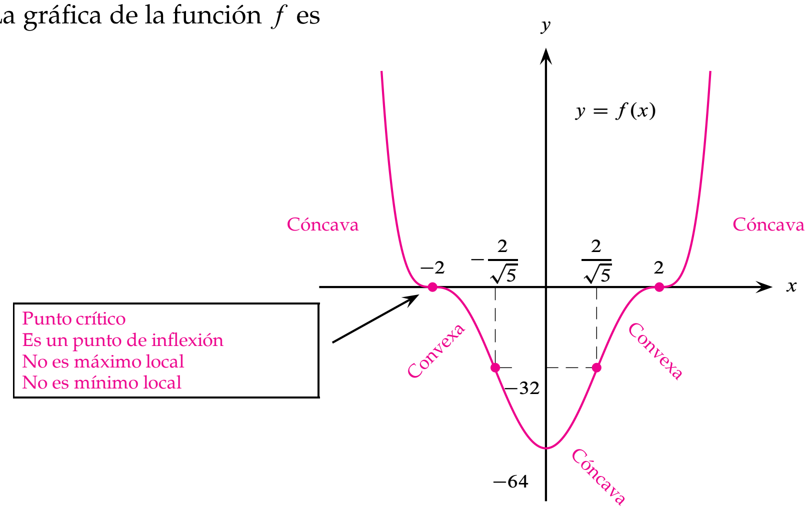
Vemos entonces que en $\left(-2, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, 2\right)$ la función es cóncava hacia abajo.

Vemos también que en $(-\infty, -2)$, en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y en $(2, +\infty)$ lo es hacia arriba.

Los puntos $(\pm 2, 0)$ & $\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-16^3}{125}\right) \approx (\pm 0.89, -32.77)$ son de inflexión.

Tenemos además que $f(0) = -64$ & $f(\pm 2.8) = 56.62$.

c. La gráfica de la función f es



Todo concuerda con que f es par; $(0, -64)$ resulta ser mínimo absoluto y f no tiene máximo absoluto.

□

6. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^4}{2} - x^2 + 3$.
   a. Determinar dominio, intervalos de continuidad y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (No determine las raíces de f.)
   b. Determine los puntos críticos y los intervalos de monotonía.
   c. Clasifique los puntos críticos (extremos) y determine los intervalos de concavidad.
   d. Obtenga los puntos de inflexión, la gráfica de f y el número de raíces de f. (No intente calcular las raíces de f.)

▼

a. Dominio: $D_f = \mathbb{R}$ donde f es continua.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x^6\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^6}\right)\right] = +\infty.$$

b.
$$f'(x) = x^5 + 2x^3 - 2x = x(x^4 + 2x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; x^4 + 2x^2 - 2 = 0.$$

Resolviendo esta última ecuación para x^2

$$x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Como estamos entre números reales, desechamos los valores de x tales que $x^2 = -1 - \sqrt{3}$, por ser $-1 - \sqrt{3} < 0$:

$x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{3}} \approx \pm\sqrt{-1 + 1.7320508} = \pm\sqrt{0.7320508} \approx \pm 0.8555997.$
Estos dos valores, junto con $x = 0$ constituyen los puntos críticos; además

$$f'(x) = x\left(x^2 - \left[-1-\sqrt{3}\right]\right)\left(x^2 - \left[-1+\sqrt{3}\right]\right) =$$
$$= x\left(x^2 + 1 + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)\left(x + \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right).$$

Como $x^2 + 1 + \sqrt{3} > 0$ siempre, el signo de $f'(x)$ nos lo da

$$x\left(x - \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)\left(x + \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right).$$

Veámoslo:

	Signo de			
Intervalo	$x + \sqrt{-1+\sqrt{3}}$	x	$x - \sqrt{-1+\sqrt{3}}$	$f'(x)$
$x < -\sqrt{-1+\sqrt{3}} (< 0 < \sqrt{-1+\sqrt{3}})$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-\sqrt{-1+\sqrt{3}} < x < 0 (< \sqrt{-1+\sqrt{3}})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$(-\sqrt{-1+\sqrt{3}} <) 0 < x < \sqrt{-1+\sqrt{3}}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(-\sqrt{-1+\sqrt{3}} < 0 <) \sqrt{-1+\sqrt{3}} < x$	$+$	$+$	$+$	$+$

La función f es creciente en $\left(-\sqrt{-1+\sqrt{3}}, 0\right)$ y en $\left(\sqrt{-1+\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

La función f es decreciente en $\left(-\infty, -\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$ y en $\left(0, \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$.

c. En $x = \pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}$ tenemos mínimos relativos y en $x = 0$ máximo relativo pues la función f pasa de ser creciente a decreciente, a diferencia de los otros dos anteriores en que esa función pasa de ser decreciente a ser creciente.
Para determinar los intervalos de concavidad calculemos la segunda derivada

$$f''(x) = 5x^4 + 6x^2 - 2.$$

Veamos ahora dónde es positiva y dónde es negativa.

$$5x^4 + 6x^2 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36+40}}{10} = -\frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}.$$

Nuevamente desechamos los x tales que $x^2 = -\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$ pues no son reales, y tenemos sólo dos puntos x tales que anulan la ecuación de cuarto grado:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} \approx \pm 0.521325$$

y además

$$f''(x) = 5\left(x^4 + \frac{6}{5}x^2 - \frac{2}{5}\right) =$$
$$= 5\left(x^2 + \frac{3+\sqrt{19}}{5}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right).$$

Como $x^2 + \frac{3+\sqrt{19}}{5} > 0$ siempre, el signo de $f''(x)$ nos lo da

$$\left(x + \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right).$$

Veámoslo:

	Signo de		
Intervalo	$x + \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}$	$x - \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}$	$f''(x)$
$x < -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} \left(< \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)$	$-$	$-$	$+$
$-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} < x < \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}$	$+$	$-$	$-$
$\left(-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} <\right) \sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}} < x$	$+$	$+$	$+$

La función f es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, +\infty\right)$.

La función f es cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{19}}{5}}, \sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)$.

d. Los puntos de inflexión se tienen para $x = \pm\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{19}}{5}}$, pues en ellos la segunda derivada vale cero y cambia de signo.

Ahora bien como $f(x) = 3 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{6}$,

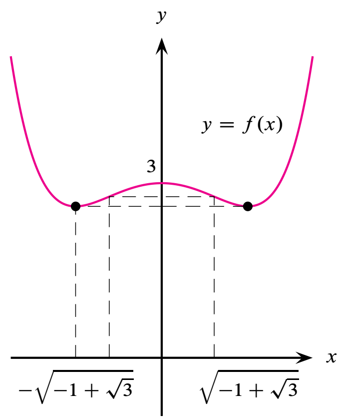
$$f\left(\pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right) = 3 + 1 - \sqrt{3} + \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{3\sqrt{3} - 3\times 3 + 3\sqrt{3} - 1}{6} =$$

$$= 4 - \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{5}{3} = \frac{13}{3} - \sqrt{3} \approx 2.6012825\,.$$

Hallamos que $(\pm\sqrt{-1+\sqrt{3}}, 2.6012825)$ son puntos de la gráfica de f donde hay mínimos relativos.

En $(0, 3)$ hay un máximo relativo.

La gráfica de f es:



Resulta que los mínimos relativos son también mínimos absolutos.

Los puntos de inflexión son

$$\left[\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}, f\left(\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{19}}{5}}\right)\right] \approx$$

$$\approx \left(\pm 0.521325, 3 - \frac{\sqrt{19}-3}{5} + \frac{19 - 6\sqrt{19} + 9}{50} + \frac{[\sqrt{19}-3][28 - 6\sqrt{19}]}{750}\right) =$$

$$= \left(\pm 0.521325, 3 + \frac{-150\sqrt{19} + 450 + 420 - 90\sqrt{19} + 46\sqrt{19} - 198}{750}\right) =$$

$$= \left(\pm 0.521325, 3 + \frac{-194\sqrt{19} + 672}{750}\right) \approx (\pm 0.521325, 2.7684981).$$

La función no tiene raíces.

Todo concuerda con que la función f es par.

□

Ejercicios 9.1.2 *Gráfica de una función racional.*

1. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia abajo y hacia arriba. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

▼ Vamos a derivar dos veces la función f

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(1-x^2)2x - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = 2 \cdot \frac{2x - 2x^3 + 2x^3}{(1-x^2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot \frac{x}{(1-x^2)^2}. \qquad (*)$$

De aquí calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{(1-x^2)^2 \times 1 - x \times 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = 4 \cdot \frac{(1-x^2)\left[(1-x^2)+4x^2\right]}{(1-x^2)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 4 \cdot \frac{1+3x^2}{(1-x^2)^3}. \qquad (**)$$

La función f está definida en todos los reales excepto en la raíces del denominador $(1-x^2)^3$:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |\,x\,| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o bien } x = -1.$$

De aquí concluimos que:

Dominio de la función = $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Las raíces de f son las raíces de su numerador (siempre y cuando estén en el dominio de la función)

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

La raíz de f: $x = 0$.

Las asíntotas verticales de f vienen dadas por los ceros o raíces del denominador que no son ceros del numerador, en este caso:

Las asíntotas verticales de f: $x = -1$ & $x = 1$.

Para las asíntotas horizontales calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2\frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{\frac{1}{x^2}-1} = -2.$$

Así: $y = -2$ es la asíntota horizontal de la función f.

Las raíces de f' son las raíces de su numerador

$$x = 0, \text{ que representa un punto crítico de } f.$$

De la expresión $(*)$ vemos que el signo de la derivada nos lo proporciona el numerador x. Por lo que concluimos que:

La función f crece en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$.

La función f decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, 0)$.

También obtenemos de aquí que $f(0) = 0$ es un mínimo relativo.

El signo de la segunda derivada nos lo proporciona el denominador $(1-x^2)^3$, pero esta expresión tiene el mismo signo que $g(x) = 1-x^2$. Usamos por tanto esta expresión. Las raíces son -1 y también 1. Si evaluamos en puntos intermedios apropiados obtenemos

$$\begin{cases} f''(-2) < 0 \\ f''(0) > 0 \\ f''(2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \text{ en } (-\infty, -1); \\ f''(x) > 0 \text{ en } (-1, 1); \\ f''(x) < 0 \text{ en } (1, +\infty). \end{cases}$$

Esto nos dice que:

La función f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

La función f es cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$.

La concavidad cambia en $x = \pm 1$, pero como f no está definida en esos valores, la función no tiene puntos de inflexión.

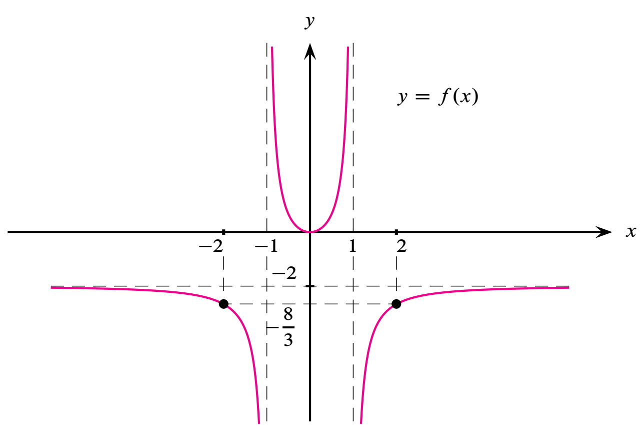
Con toda la información anterior estamos listos para dar un bosquejo de la gráfica. Para precisarla, vamos a evaluar la función f en dos puntos, notando que f es par:

$$f(2) = f(-2) = \frac{2(-2)^2}{1-(-2)^2} = \frac{8}{1-4} = -\frac{8}{3}\,.$$

También notamos que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{(1+x)(1-x)} = -\infty = \lim_{x\to -1^-} f(x);$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{(1+x)(1-x)} = +\infty = \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

La gráfica de la función f es:



□

2. Para la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos críticos y su clasificación, así como los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo. Finalmente, con estos elementos haga un bosquejo de la gráfica de la función.

▼ Vemos que el dominio de f es $D_f = \mathbb{R} - \{\,0\,\}$.

Intervalos de monotonía: calculemos la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{2(x-1)x^2 - 2x(x-1)^2}{x^4}\,.$$

Simplificando x y factorizando $2(x-1)$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-x+1)}{x^3} = \frac{2(x-1)}{x^3}, \text{ (con } x \neq 0).$$

De donde vemos que el punto crítico es 1 (ahí la derivada vale 0).

Veamos ahora el signo de la derivada y de aquí inferiremos dónde la función es creciente y dónde decreciente.

	Signo de			
Intervalo	x^3	$x-1$	$f'(x)$	f es
$x<0(<1)$	$-$	$-$	$+$	creciente
$0<x<1$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$(0<)1<x$	$+$	$+$	$+$	creciente

Vemos que para $x=1$, es decir, en el punto $(1,0)$ de la gráfica de la función hay un mínimo local pues la función ahí pasa de ser decreciente a ser creciente; además resulta ser mínimo absoluto, pues $f(x)\geq 0$ para $x\in D_f$.

Intervalos de concavidad: calculemos la segunda derivada de la función

$$f''(x)=\frac{2x^3-3x^2 2(x-1)}{x^6};$$

simplificando x^2:

$$f''(x)=\frac{2x-6(x-1)}{x^4}=\frac{2x-6x+6}{x^4}=\frac{-4x+6}{x^4}=\frac{2(3-2x)}{x^4};$$

$$f''(x)>0 \text{ si } 3-2x>0, \text{ es decir, si } 2x<3 \text{ o sea } x<\frac{3}{2};$$

por lo que la función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{3}{2}\right)$;

$$f''(x)<0 \text{ si } 3-2x<0, \text{ esto es, cuando } 2x>3 \text{ o bien cuando } x>\frac{3}{2}.$$

De donde inferimos que esta función f es cóncava hacia abajo en $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ y que en $\left[\frac{3}{2},f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$ hay un punto de inflexión; y como

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{9},$$

el punto es $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{9}\right)$.

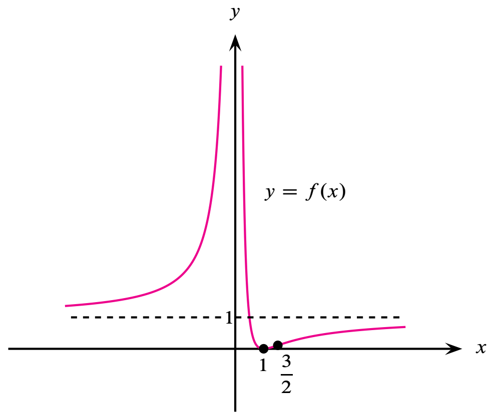
Para bosquejar la gráfica de la función, enfaticemos que f es continua en su dominio $\mathbb{R}-\{0\}$ y observemos que la recta $y=1$ es asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^2}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})=1-0+0=1$$

y que $x=0$ es asíntota vertical pues

$$\lim_{x\to 0^\pm}f(x)=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{(x-1)^2}{x^2}=+\infty.$$

Conjuntando todos estos elementos, la gráfica de la función f es:



□

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$. Proporcione:

   a. El dominio de la función.
   b. Las raíces de la función.
   c. Los intervalos de monotonía.
   d. Los intervalos de concavidad.
   e. La gráfica de la función.

▼

   a. Dominio: $D_f = R - \{1\}$.
   b. Las raíces: $\{-2, 2\}$.
   c. Vamos a derivar la función ($x - 1 \neq 0$):

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{x^2-4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2\dfrac{d}{dx}(x^2-4) - (x^2-4)\dfrac{d}{dx}(x-1)^2}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(x-1)^2(2x) - (x^2-4)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(x-1)(2x) - (x^2-4)2]}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(x-1)(2x) - 2(x^2-4)}{(x-1)^3} = \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 8}{(x-1)^3} =$$
$$= \frac{-2x+8}{(x-1)^3} = -2\frac{x-4}{(x-1)^3}\,.$$

La raíz de la derivada es $x = 4$. La derivada no está definida en $x = 1$.
El signo de la primera derivada viene dado por la expresión $-\dfrac{x-4}{x-1}$.
Los intervalos de monotonía los calculamos con la tabla siguiente:

Intervalo	*Valor de prueba*	$-\dfrac{x-4}{x-1}$	*Signo de* $f'(x)$
$x < 1$	0	$-\dfrac{-4}{-1}$	$-$
$1 < x < 4$	2	$-\dfrac{2-4}{2-1}$	$+$
$4 < x$	10	$-\dfrac{10-4}{10-1}$	$-$

La función es decreciente en $(-\infty, 1]$ y en $(4, +\infty)$.

La función es creciente en $(1, 4)$.

En $[4, f(4)] = \left(4, \frac{4}{3}\right)$ hay un máximo local estricto.

d. Calculamos la segunda derivada

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-2\frac{x-4}{(x-1)^3}\right] = -2\frac{(x-1)^3\frac{d}{dx}(x-4) - (x-4)\frac{d}{dx}(x-1)^3}{[(x-1)^3]^2} =$$
$$= -2\frac{(x-1)^3(1) - (x-4)3(x-1)^2}{(x-1)^6} = -2\frac{(x-1)^3 - 3(x-4)(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$
$$= -2\frac{(x-1)^2[(x-1) - 3(x-4)]}{(x-1)^6} = -2\frac{(x-1) - 3(x-4)}{(x-1)^4} =$$
$$= -2\frac{x - 1 - 3x + 12}{(x-1)^4} = -2\frac{-2x + 11}{(x-1)^4} =$$
$$= 2\frac{2x - 11}{(x-1)^4}\,.$$

La raíz de la segunda derivada es $x = \frac{11}{2}$.

El signo de la segunda derivada viene dado por la expresión $2x - 11$.

Los intervalos de concavidad los calculamos con la tabla siguiente:

Intervalo	*Valor de prueba*	$2x - 11$	*Signo de* $f''(x)$
$x < 1$	0	-11	$-$
$1 < x < \frac{11}{2}$	2	-7	$-$
$\frac{11}{2} < x$	10	$20 - 11$	$+$

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1) \cup \left(1, \frac{11}{2}\right)$.

La función es cóncava hacia arriba en $\left(\frac{11}{2}, +\infty\right)$.

e. Para calcular las asíntotas horizontales obtenemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

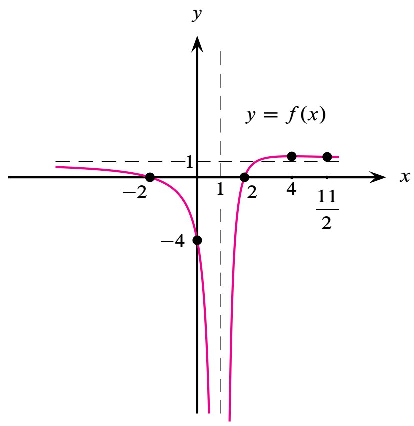
Tenemos una única asíntota horizontal: $y = 1$.

Tenemos igualmente una única asíntota vertical: $x = 1$.

Vamos a evaluar la función en algunos puntos

x	$f(x)$
0	-4
4	1.3333
$\frac{11}{2}$	1.296

Usando toda la información anterior y dado que $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{(x-1)^2} = -\infty$, la gráfica de la función f es:



El máximo local estricto $(4, 1.\overline{3})$ resulta ser absoluto.

□

4. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Proporcione:

   a. El dominio de la función.
   b. Los intervalos de monotonía.
   c. Los intervalos de concavidad.
   d. Los puntos de inflexión.
   e. La gráfica de la función.

▼

   a. Dominio: $D_f = \mathbb{R}$ & f no tiene raíces.
   b. Vamos a derivar la función

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

La raíz de la derivada es $x = 0$.
El signo de la primera derivada viene dado por la expresión $-x$.

Los intervalos de monotonía los calculamos con la tabla siguiente:

Intervalo	*Valor de prueba*	$-x$	*Signo de* $f'(x)$
$x < 0$	-1	1	$+$
$x > 0$	1	-1	$-$

La función es creciente en $(-\infty, 0)$.
La función es decreciente en $(0, +\infty)$.
En $[0, f(0)] = (0, 1)$ hay un máximo local estricto.

c. Calculamos la segunda derivada

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right] = \frac{d}{dx}\left[-2\frac{x}{(1+x^2)^2}\right] =$$
$$= -2\frac{(1+x^2)^2\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(1+x^2)^2}{[(1+x^2)^2]^2} = -2\frac{(1+x^2)^2 - x\times 2\times(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} =$$
$$= -2\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = -2\frac{(1+x^2)[(1+x^2) - 4x^2]}{(1+x^2)^4} =$$
$$= -2\frac{(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^3} = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} =$$
$$= 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}\,.$$

La raíces de la segunda derivada las obtenemos al resolver la ecuación

$$3x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0.577\,.$$

El signo de la segunda derivada viene dado por la expresión $3x^2 - 1$.
Los intervalos de concavidad los calculamos con la tabla siguiente:

Intervalo	*Valor de prueba*	$3x^2 - 1$	*Signo de* $f''(x)$
$x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$	-10	$3(-10)^2 - 1$	$+$
$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-1	$-$
$\frac{\sqrt{3}}{3} < x$	10	$3(10)^2 - 1$	$+$

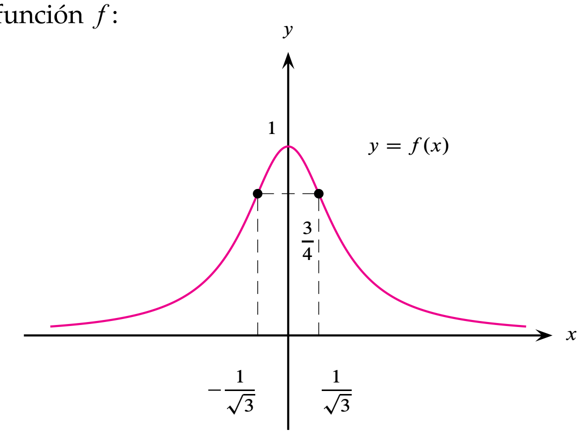
La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

La función es cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

d. En $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ hay puntos de inflexión que son: $\left[\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \left[\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right]$.

e. Notemos además que es una función par y que la asíntota horizontal es $y = 0$, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = 0^+$.

Ahora, la gráfica de la función f:



El máximo local $(0, 1)$ resulta ser un máximo absoluto.

□

5. Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{x^2-3}{x^3}$. Halle el dominio y las raíces de la función. Las asíntotas verticales y las horizontales. Los puntos críticos. Los intervalos de concavidad. Haga un bosquejo de esa función.

▼ El dominio de la función: $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$.

La función es impar.

Las raíces de la función son aquellos valores que hacen cero el numerador (y no hacen cero el denominador), entonces:

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ o bien } x = \sqrt{3}.$$

Asíntotas verticales: ceros del denominador que no son ceros del numerador. En este caso se ve claramente que la única asíntota vertical es $x = 0$ y que $\lim\limits_{x\to\pm 0} f(x) = \mp\infty$.

Asíntotas horizontales. Para esto calculamos

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^3}\right) = 0.$$

Entonces la única asíntota horizontal es $y = 0$.

Calculamos la derivada de la función

$$h'(x) = \frac{x^3(2x) - (x^2-3)(3x^2)}{x^6} = \frac{x^2[x(2x) - (x^2-3)(3)]}{x^6} =$$

$$= \frac{2x^2 - 3x^2 + 9}{x^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{-x^2+9}{x^4}. \qquad (*)$$

La función h' es par.

Para encontrar los puntos críticos, igualamos a cero la primera derivada:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \text{ o bien } x = -3.$$

Puesto que en $x = 0$ hay una asíntota vertical, consideramos como intervalos para el análisis del signo de la primera derivada a $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, \infty)$.

Sólo consideramos el numerador, pues el denominador de la primera derivada siempre es positivo. Así tomando como valores de prueba en esos intervalos a $x = \pm 4$ y a $x = \pm 2$ tenemos:

$$x = \pm 4 \Rightarrow -x^2 + 9 = -(\pm 4)^2 + 9 < 0 \Rightarrow h'(\pm 4) < 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \text{ si } x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)\,;$$
$$x = \pm 2 \Rightarrow -x^2 + 9 = -(\pm 2)^2 + 9 > 0 \Rightarrow h'(\pm 2) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0 \text{ para } x \in (-3, 0) \cup (0, 3)\,.$$

Entonces la función h' es continua en tales intervalos.

Concluimos que:

La función h es creciente en $(-3, 0)$ y en $(0, 3)$.

La función h es decreciente en $(-\infty, -3)$ y en $(3, +\infty)$.

Para $x = -3$ hay un mínimo local, $h(-3) = \dfrac{-2}{9} = -0.\overline{2}$, pues ahí la función pasa de ser decreciente a ser creciente y para $x = 3$ hay un máximo local, $h(3) = 0.\overline{2}$, pues ahí, por lo contrario, pasa de ser creciente a ser decreciente.

Calculamos ahora la segunda derivada de la función, a partir de $(*)$:

$$h''(x) = \left(\frac{9 - x^2}{x^4}\right)' = \frac{-2x^5 - 4x^3(9 - x^2)}{x^8} =$$
$$= \frac{-2x^5 - 36x^3 + 4x^5}{x^8} = \frac{2x^5 - 36x^3}{x^8} = \frac{2x^3(x^2 - 18)}{x^8} = \frac{2(x^2 - 18)}{x^5}\,.$$

Si $x > 0$, el signo de la derivada nos lo da $x^2 - 18$, entonces:

$$\text{Para } x > 0\text{: } h''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 18 = (x + 3\sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{llllll}
\Leftrightarrow x + 3\sqrt{2} > 0 & \& \; x - 3\sqrt{2} > 0 & \text{o bien} & x + 3\sqrt{2} < 0 & \& \; x - 3\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x > -3\sqrt{2} & \& \; x > 3\sqrt{2} & \text{o bien} & x < -3\sqrt{2} & \& \; x < 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x \in \left(3\sqrt{2}, +\infty\right) & & \text{o bien} & x \in \left(-\infty, -3\sqrt{2}\right). &
\end{array}$$

Entonces, si $x > 0$:

h es cóncava hacia arriba para $x \in \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$.

h es cóncava hacia abajo para $x \in \left(0, 3\sqrt{2}\right)$ por ser el complemento.

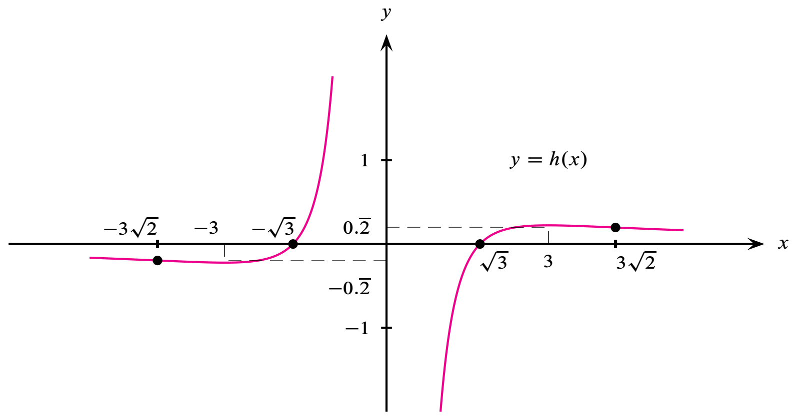
Como h es impar concluimos que:

h es cóncava hacia arriba si $x \in \left(-3\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(3\sqrt{2}, +\infty\right)$.

h es cóncava hacia abajo si $x \in \left(-\infty, -3\sqrt{2}\right) \cup \left(0, 3\sqrt{2}\right)$.

Luego, los puntos $\left(-3\sqrt{2}, \dfrac{-5}{18 \times \sqrt{2}}\right) \approx (-4.243, -0.1964)$ y $\left(3\sqrt{2}, \dfrac{5}{18 \times \sqrt{2}}\right)$ son de inflexión.

Con todos estos datos, podemos hacer el bosquejo de la gráfica de la función h:



□

6. Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}\,.$$

Diga en qué intervalos es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, determine los puntos de inflexión y grafique.

▼ Calculemos primero la primera y la segunda derivada

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2};$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(1-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(x^2+1)-4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}\,.$$

Luego, los puntos de inflexión se encuentran cuando

$$2x^3-6x = 2x(x^2-3) = 2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\&\; x = \pm\sqrt{3}\,.$$

El signo de la segunda derivada nos lo da esta misma expresión, pues el denominador $(x^2+1)^3$ siempre es positivo.

Determinemos el signo de la segunda derivada:

	Signo de				
Intervalo	$x+\sqrt{3}$	x	$x-\sqrt{3}$	$f''(x)$	*f es cóncava hacia*
$x < -\sqrt{3}(< 0 < \sqrt{3})$	−	−	−	−	abajo
$-\sqrt{3} < x < 0(< \sqrt{3})$	+	−	−	+	arriba
$(-\sqrt{3} <)0 < x < \sqrt{3}$	+	+	−	−	abajo
$(-\sqrt{3} < 0 <)\sqrt{3} < x$	+	+	+	+	arriba

Como $2x(x^2-3) = 2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$, su signo nos lo da $x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

Además:

$D_f = \mathbb{R}$; la única raíz de f es $x = 0$ y la función f es impar.

Dado que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$, entonces $y = 0$ es asíntota horizontal.

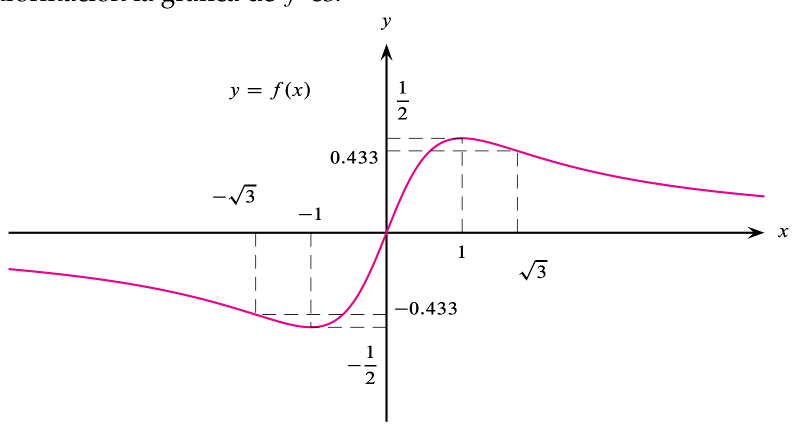
Los puntos críticos de f son $x = \pm 1$ cuando $f'(x) = 0$.
El signo de $f'(x)$ nos lo da $1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$, luego:

	Signo de			
Intervalo	$1 + x$	$1 - x$	$f'(x)$	f *es*
$x < -1 (< 1)$	$-$	$+$	$-$	decreciente
$-1 < x < 1$	$+$	$+$	$+$	creciente
$(-1 <) 1 < x$	$+$	$-$	$-$	decreciente

En $x = 1$, hay un máximo relativo pues f pasa de ser creciente a ser decreciente y también $f(1) = \frac{1}{2}$.
En $x = -1$, hay un mínimo relativo pues f pasa de ser decreciente a ser creciente y también $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Las ordenadas de los puntos de inflexión son $f(\pm\sqrt{3}) = \frac{\pm\sqrt{3}}{4} \approx \pm 0.4330127$ así como $f(0) = 0$.

Y con toda esta información la gráfica de f es:



□

7. Dada la siguiente función: $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x - 2}$, determine sus intervalos de monotonía, los puntos extremos y grafique esa función.

▼ Como $f(x) = x + 1 + (x - 2)^{-1}$, entonces:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} < 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 > 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 2 > 1 \text{ o bien } x - 2 < -1 \Leftrightarrow x > 3, \text{ o bien } x < 1.$$

Luego, f es creciente en

$$(-\infty, 1) \text{ y en } (3, +\infty)$$

y decreciente en

$$(1, 2) \text{ y en } (2, 3)\,.$$

Observe que $x = 2 \notin D_f$.

Los puntos críticos aparecen cuando

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x-2| = 1 \Leftrightarrow x-2 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ o bien } x = 3.$$

Como en $x = 1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, en el punto

$$[1, f(1)] = \left(1, 1+1+\frac{1}{1-2}\right) = (1, 1), \text{ la función tiene un máximo relativo.}$$

Y en $x = 3$, un mínimo relativo pues la función pasa de ser decreciente a ser creciente;

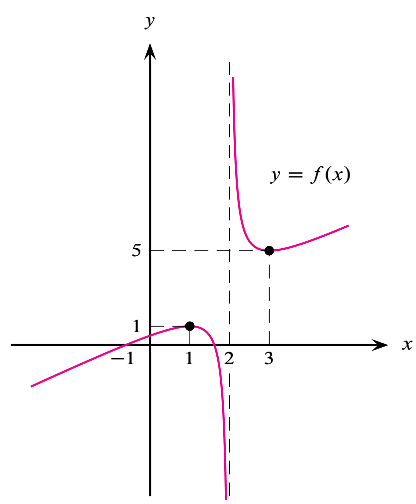
El mínimo es $f(3) = 3 + 1 + \dfrac{1}{3-2} = 5$.

También vemos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

Además

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-2} = \frac{x^2 - 2x + x - 2 + 1}{x-2} = \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \approx \begin{cases} 1.6 \\ -0.6 \end{cases} \quad \text{son las raíces.}$$

La gráfica es:



□

8. Graficar la función $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, determinando:

a. Dominio, raíces y simetría.

b. Asíntotas.

c. Intervalos de monotonía.

d. Intervalos de concavidad.

e. Puntos críticos y su clasificación. Puntos de inflexión.

▼

a. Como se trata de una función racional, su dominio son los reales menos las raíces del denominador, esto es, las x tales que

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1\,.$$

Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

Por lo tanto la función tiene una raíz en $x = 0$, ya que $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Y es impar, pues

$$f(-x) = \frac{-x}{1 - (-x)^2} = -\frac{x}{1 - x^2} = -f(x)\,.$$

b. Calculamos

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{(1 + x)(1 - x)} = +\infty;$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{(1 + x)(1 - x)} = -\infty\,.$$

Por lo que la recta $x = -1$ es una asíntota vertical y, por paridad, la recta $x = 1$ también es asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{(1 + x)(1 - x)} = +\infty;$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{(1 + x)(1 - x)} = -\infty\,.$$

Por otro lado:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{0}{0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0\,.$$

Por lo que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

c. Calculemos la derivada

$$f'(x) = \frac{(1 - x^2)(1) - x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}\,.$$

La función es creciente en $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y en $(1, +\infty)$ ya que $f'(x) > 0$ para cada $x \neq \pm 1$.

d. Calculemos la segunda derivada de la función f:

$$f''(x) = [f'(x)]' = \frac{(1 - x^2)^2(2x) - (1 + x^2) \times 2(1 - x^2)(-2x)}{(1 - x^2)^4} = \frac{2x(1 - x^2) + 4x(1 + x^2)}{(1 - x^2)^3} =$$
$$= \frac{2x - 2x^3 + 4x + 4x^3}{(1 - x^2)^3} = \frac{6x + 2x^3}{(1 - x^2)^3} =$$
$$= \frac{2x(3 + x^2)}{(1 - x^2)^3}\,.$$

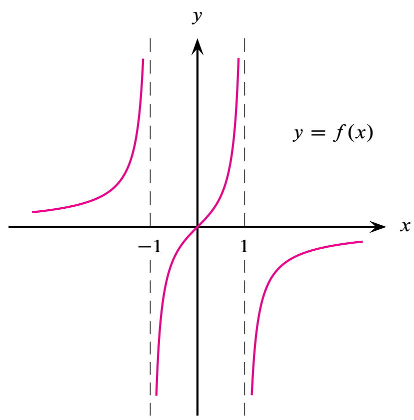
El signo de la segunda derivada lo dan x & $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x) = -(x - 1)(x + 1)$. Usamos la tabla que sigue para determinar los intervalos de concavidad:

	Signo de			
Intervalo	$x + 1$	x	$-(x - 1)$	$f''(x)$
$x < -1\ (< 0 < 1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-1 < x < 0 (< 1)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$(-1 <) 0 < x < 1$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x > 1\ (> 0 > -1)$	$+$	$+$	$-$	$-$

Por lo tanto:
La función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
La función f es cóncava hacia abajo en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

e. La función f no tiene puntos críticos; en $(0, 0)$ tiene un punto de inflexión ya que ahí su gráfica cambia el sentido de su concavidad (pasa de ser hacia abajo a ser hacia arriba) y además es continua.

Y ahora veamos su gráfica:



□

9. Sea la función $f(x) = -\dfrac{x^2}{(x-5)^2}$.

a. Encuentre los puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b. Encuentre los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad.
c. Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
d. Haga un bosquejo de la gráfica.

▼

a. Puntos críticos:
Primero necesitamos calcular la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{-2x(x-5)^2 + 2x^2(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{-2x(x-5) + 2x^2}{(x-5)^3} = \frac{10x}{(x-5)^3}.$$

El único punto crítico es $x = 0$ y observamos que $5 \notin D_f$, entonces los intervalos de monotonía son:
$x < 0 < 5 \Rightarrow f'(x) > 0$; puesto que tanto $10x$ como $(x-5)^3$ son negativos, $\Rightarrow f$ es creciente.
$0 < x < 5 \Rightarrow f'(x) < 0$, puesto que $10x > 0$ y tanto $x - 5$ como $(x-5)^3$ son negativos, $\Rightarrow f$ es decreciente.
$x > 5(> 0) \Rightarrow f'(x) > 0$, puesto que tanto $10x$ como $x - 5$ y también $(x-5)^3$ son positivos, $\Rightarrow f(x)$ es creciente.
Su máximo local estricto: $[0, f(0)] = (0, 0)$.

b. Puntos de inflexión:
Calculemos la segunda derivada de la función

$$f''(x) = \frac{10(x-5)^3 - 10x \times 3(x-5)^2}{(x-5)^6} = \frac{10(x-5) - 30x}{(x-5)^4} =$$
$$= \frac{-20x - 50}{(x-5)^4} = 10\frac{-2x-5}{(x-5)^4}.$$

El signo de esta derivada segunda lo da el numerador, ya que $(x-5)^4 > 0$ para $x \neq 5$:

$$-2x - 5 > 0 \;\Leftrightarrow\; -2x > 5 \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{5}{2}\,.$$

En $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$, la gráfica de la función es cóncava hacia arriba:

$$-2x - 5 < 0 \;\Leftrightarrow\; -2x < +5 \;\Leftrightarrow\; x > -\frac{5}{2}\,.$$

En $\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$ y en $(5, +\infty)$, la gráfica es cóncava hacia abajo; y para $x = -\frac{5}{2}$, hay un punto de inflexión, pues ahí la gráfica cambia el sentido de la concavidad y la función f es continua.
Tal punto de inflexión es:

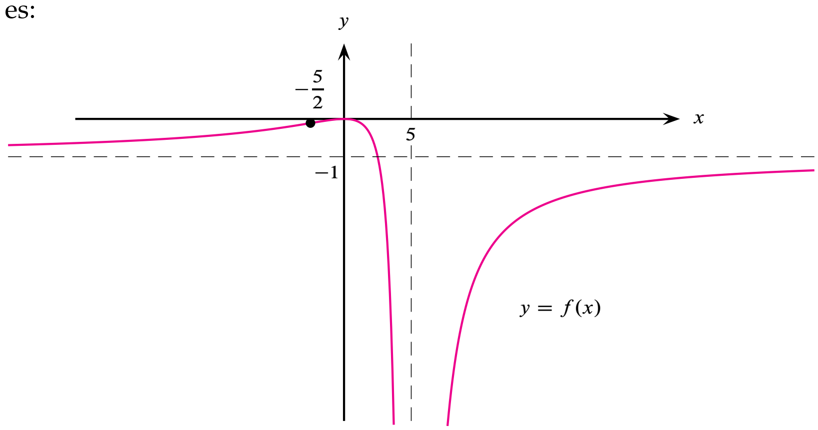
$$\left[-\frac{5}{2}, f\left(-\frac{5}{2}\right)\right] = \left[-\frac{5}{2}, \frac{-\frac{25}{4}}{\left(-\frac{5}{2}-5\right)^2}\right] = \left[-\frac{5}{2}, \frac{-\frac{25}{4}}{\left(-\frac{15}{2}\right)^2}\right] = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{9}\right).$$

c. $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5}\left[-\left(\frac{x}{x-5}\right)^2\right] = -\infty$, por lo que la recta $x = 5$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2}{x^2-10x+25} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{1-\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2}} = \frac{-1}{1-0+0} = \frac{-1}{1} = -1.$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

d. La gráfica de f es:



□

10. Para la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$, determine:

a. Dominio, raíces y paridad.
b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo y puntos de inflexión.
d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.

g. Esbozo gráfico y rango.

▼

a. Su dominio es:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x = 0 \right\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Raíces: como $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3}$,

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x+1}{x^3} = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1.$$

Paridad:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \;\Rightarrow\; f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3};$$
$$-f(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}.$$

Luego, $f(-x) \neq f(x)$ & $f(-x) \neq -f(x)$.
Por lo tanto, la función f no es par y tampoco es impar.

b. Derivamos:

$$f(x) = x^{-2} + x^{-3} \;\Rightarrow\; f'(x) = -2x^{-3} - 3x^{-4} = -\left(\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}\right) = -\frac{2x+3}{x^4}.$$

Aquí es importante observar que, para cada $x \neq 0$, se tiene que $x^4 > 0$. Por esto:

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{2x+3}{x^4} > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x+3}{x^4} < 0 \;\Leftrightarrow\; 2x+3 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{3}{2};$$
$$f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{2x+3}{x^4} < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x+3}{x^4} > 0 \;\Leftrightarrow\; 2x+3 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > -\frac{3}{2}.$$

Por lo tanto, f es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$; es decreciente en los intervalos $\left(-\dfrac{3}{2}, 0\right)$ y $(0, +\infty)$.

c. Segunda derivada:

$$f'(x) = -2x^{-3} - 3x^{-4} \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x^{-4} + 12x^{-5} = \frac{6}{x^4} + \frac{12}{x^5} = \frac{6x+12}{x^5}.$$

Primero vemos que

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6x+12}{x^5} = 0 \;\Leftrightarrow\; 6x + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2.$$

Considerando este número $x = -2$ y excluyendo a $x = 0$, generamos los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ & $(0, +\infty)$, en los cuales veremos el signo de $f''(x)$.

Intervalo	*Valor de prueba*	$f''(x)$	*f es cóncava hacia*
$-\infty < x < -2$	$x = -3$	$\frac{2}{81} > 0$	arriba
$-2 < x < 0$	$x = -1$	$-6 < 0$	abajo
$0 < x < +\infty$	$x = 2$	$\frac{3}{4} > 0$	arriba

Luego, f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$.
Y es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-2, 0)$.
Existen cambios de concavidad en $x = -2$ y en $x = 0$, pero la función no es continua en $x = 0$, de hecho $x \notin D_f$. Entonces hay un punto de inflexión en $x = -2$.

d. Por ser una función racional, f es continua en todo su dominio $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Esto es, f es continua en el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
La función f tiene una discontinuidad en $x = 0$.
Como $\lim\limits_{x\to 0}(x + 1) = 1$ & $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0}\right)\text{”} = \infty$. Es decir, la discontinuidad es esencial; se dice también que la discontinuidad es infinita.

e. Precisamos $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ determinando los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^-}\right)\text{”}.$$

Puesto que $x \to 0^-$, entonces $x < 0$ & $(x + 1) \to 1 > 0$.
Como $x^3 < 0$ & $(x + 1) > 0$, entonces $\frac{x+1}{x^3} < 0$, por lo que $\frac{x+1}{x^3} \to -\infty$.
Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^3} = \text{“}\left(\frac{1}{0^+}\right)\text{”}.$$

Puesto que $x \to 0^+$, entonces $x > 0$ & $(x + 1) \to 1 > 0$.
Como $x^3 > 0$ & $(x + 1) > 0$, entonces $\frac{x+1}{x^3} > 0$, por lo que $\frac{x+1}{x^3} \to +\infty$.
Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

De lo anterior se desprende que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical y que además es la única.
Ahora bien,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 0 \;\&\; \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

Luego, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal y además es la única.

f. Vemos que:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{2x+3}{x^4} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{3}{2}\,,$$

lo cual implica que f tiene un único punto crítico en $x = -\frac{3}{2}$.
Por el inciso (b) se sabe que f es creciente para $x < -\frac{3}{2}$ y decreciente para $x > -\frac{3}{2}$.
Entonces, por el criterio de la primera derivada, f tiene en $x = -\frac{3}{2}$ un punto máximo local estricto.
La función f no tiene máximo ni mínimo absoluto, ya que

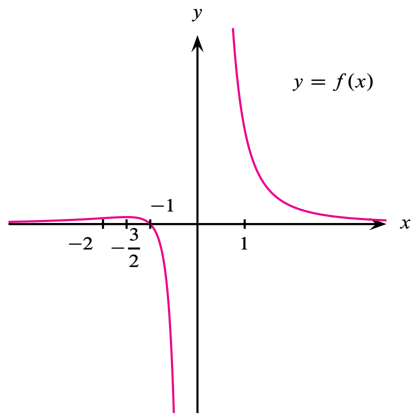
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \;\&\; \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,.$$

g. Precisamos las coordenadas del punto de inflexión y del máximo local estricto.

Punto de inflexión $= I\,[-2, f(-2)] = I\left(-2, \dfrac{1}{8}\right)$.

Máximo local $= M\left[-\dfrac{3}{2}, f\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right] = M\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{27}\right)$.

La gráfica de f es:



El rango de $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$.

□

11. Para la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$, determine:

a. El dominio y las raíces de la función.
b. Los intervalos en los cuales f es creciente o bien decreciente.
c. Los valores máximos y mínimos locales de f.
d. Los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
e. Las asíntotas verticales y horizontales.
f. La gráfica de esa función.

▼

a. Vemos que

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x+2)(x-2) \neq 0 \right\} = \\ = \mathbb{R} - \{-2, +2\}.$$

Raíz:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2}{x^2 - 4} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

b. Calculemos la derivada de la función

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 4) - 2x^2 \times 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}.$$

Observamos que $f'(x) > 0$ si $x < 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0)$;
y que $f'(x) < 0$ si $x > 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0, 2)$ y en $(2, +\infty)$.

c. $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$. Entonces la función f tiene en $x = 0$ un máximo local, pues esta función ahí pasa de ser creciente a ser decreciente.
El máximo local es $f(0) = 0$.

d. Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{-16(x^2-4)^2 + 16x \times 2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-16(x^2-4) + 64x^2}{(x^2-4)^3} =$$
$$= \frac{-16x^2 + 64 + 64x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{48x^2+64}{(x^2-4)^3} = \frac{16(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

El signo de la segunda derivada nos lo da $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Luego:

	Signo de				
Intervalo	$x+2$	$x-2$	x^2-4	$f''(x)$	f *es cóncava hacia*
$x < -2\,(< 2)$	$-$	$-$	$+$	$+$	arriba
$-2 < x < 2$	$+$	$-$	$-$	$-$	abajo
$(-2 <)\,2 < x$	$+$	$+$	$+$	$+$	arriba

e. Las asíntotas verticales son $x = 2$ & $x = -2$ pues

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2}{(x+2)(x-2)} = +\infty.$$

Para los cálculos anteriores se usa:

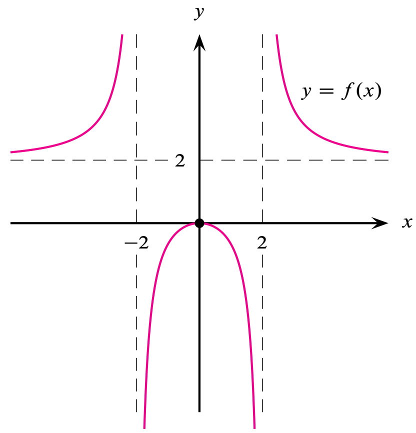
$$\lim_{x\to -2}(x-2) = -4;$$
$$\lim_{x\to -2^-}(x+2) = 0^-;$$
$$\lim_{x\to -2^+}(x+2) = 0^+;$$
$$\lim_{x\to 2}(x+2) = 4;$$
$$\lim_{x\to 2^-}(x-2) = 0^-;$$
$$\lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0^+.$$

Por lo que la función no tiene valores extremos absolutos.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{2}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Luego, $y = 2$ es asíntota vertical.

f. La gráfica de f es:



Todo concuerda con que la función es par.

□

12. Considere la función $f(x) = \dfrac{2x}{(2x-4)^2}$ y determine:

   a. El dominio, raíces e intervalos de continuidad.
   b. Asíntotas verticales y horizontales.
   c. Los intervalos de monotonía, los puntos máximos y mínimos (absolutos y relativos).
   d. Los intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
   e. Bosquejo gráfico y rango.

▼

   a. Su dominio: $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq 2 \right\} = \mathbb{R} - \{2\}$;
   Su raíz es $x = 0$.
   La función f es continua en su dominio.
   b. Si escribimos:

$$f(x) = \frac{2x}{4(x-2)^2} = \frac{x}{2(x^2-4x+4)} = \frac{1}{2(x-4-\frac{4}{x})}\,, \text{ para } x \neq 0$$

   vemos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-;$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+\,.$$

   por lo tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal.
   Vemos también que $x = 2$ es una asíntota vertical.
   Encontramos:

$$\lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = +\infty.$$

   c. Partiendo de

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x}{(x-2)^2}\,,$$

   calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x-2)^2 - x \times 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{1}{2} \times \frac{(x-2)-2x}{(x-2)^3} =$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{-2-x}{(x-2)^3} = -\frac{1}{2} \times \frac{x+2}{(x-2)^3}\,.$$

El signo de esta derivada viene dado por $-(x-2)$ y por $(x+2)$.
Construimos la tabla:

	Signo de		
Intervalo	$x+2$	$-(x-2)$	$f'(x)$
$x < -2\,(< 2)$	$-$	$+$	$-$
$-2 < x < 2$	$+$	$+$	$+$
$x > 2\,(> -2)$	$+$	$-$	$-$

y concluimos que esta función f es creciente para x en $(-2, 2)$ y que es decreciente para x en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$.
Con la información obtenida se ve que la función f no tiene máximo relativo ni absoluto y que en
$x = -2$, $f(x)$ tiene un mínimo local, en el punto

$$[-2, f(-2)] = \left(-2, \frac{-4}{64}\right) = \left(-2, -\frac{1}{16}\right).$$

d. Partiendo de:

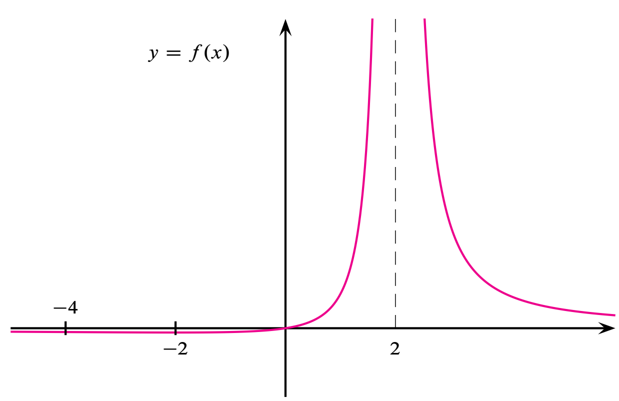
$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{x+2}{(x-2)^3},$$

calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{(x-2)^3 - (x+2) \times 3(x-2)^2}{(x-2)^6} = -\frac{1}{2} \times \frac{(x-2)-(3x+6)}{(x-2)^4} =$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{x-2-3x-6}{(x-2)^4} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2x-8}{(x-2)^4} = \frac{x+4}{(x-2)^4}.$$

El signo de la segunda derivada lo produce $x+4$, así:
La función f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4)$ pues $f''(x) < 0$ ahí;
La función f es cóncava hacia arriba en $(-4, 2)$ y en $(2, +\infty)$ ya que $f''(x) > 0$ en tales intervalos;
En $x = -4$ hay un punto de inflexión que es $[-4, f(-4)] = \left(-4, -\frac{1}{18}\right)$.

e. La gráfica de la función f es:



Rango: $R_f = \left[-\frac{1}{16}, +\infty\right)$.

□

13. Para la función $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x}$, determine:

 a. Dominio, raíces, paridad.
 b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
 c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión.
 d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
 e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
 f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
 g. Esbozo gráfico y rango.

▼

 a. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.
 Raíces:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 = -2 \;\Leftrightarrow\; x = (-2)^{\frac{1}{3}} = -(2)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2} \approx -1.26.$$

 Paridad: puesto que $f(1) = \dfrac{1+2}{1} = 3$ & $f(-1) = \dfrac{-1+2}{-1} = -1$, entonces no se cumple ni $f(1) = f(-1)$ ni $f(-1) = -f(-1)$. Con lo cual queda probado que la función no es par ni impar.

 b. Podemos escribir

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x} = x^2 + \frac{2}{x} = x^2 + 2x^{-1};$$

 derivamos esta última expresión

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3-2}{x^2} = 2(x-1)\frac{x^2+x+1}{x^2};$$

 el discriminante de la cuadrática $x^2 + x + 1$ es:

$$1^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0 \;\Rightarrow$$

 $\Rightarrow$ la cuadrática no tiene raíces reales y se ve que siempre es positiva. Por ejemplo, en $x = 0$ vale $1 > 0$.
 Por lo tanto el signo de la derivada viene dado sólo por el factor $x - 1$.
 Concluimos entonces que:
 $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 1) - \{0\} \;\Rightarrow\; f$ es decreciente si $x \in (-\infty, 0)$ o bien $x \in (0, 1)$.
 $f'(x) > 0$ si $x \in (1, +\infty) \;\Rightarrow\; f$ es creciente si $x \in (1, +\infty)$.

 c. Calculamos la segunda derivada a partir de $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = 2x - 2x^{-2}$:

$$f''(x) = 2 + 4\frac{1}{x^3} = \frac{2x^3+4}{x^3} = \frac{2}{x^2}\frac{x^3+2}{x} = \frac{2}{x^2}\frac{(x+2^{\frac{1}{3}})(x^2 - 2^{\frac{1}{3}}x + 2^{\frac{2}{3}})}{x}.$$

 La cuadrática $x^2 - 2^{\frac{1}{3}}x + 2^{\frac{2}{3}}$ tiene discriminante:

$$2^{\frac{2}{3}} - 4 \times 2^{\frac{2}{3}} < 0 \;\Rightarrow\; \text{no tiene raíces reales y además siempre es positiva.}$$

Por ejemplo, en $x = 0$ vale $2^{\frac{2}{3}} > 0$.

Así, el signo de la segunda derivada viene dado por $x + 2^{\frac{1}{3}}$ & x.
Usamos la tabla siguiente para ver el signo de la segunda derivada:

	Signo de		
Intervalo	$x + \sqrt[3]{2}$	x	$f''(x)$
$x < -\sqrt[3]{2} \, (< 0)$	$-$	$-$	$+$
$-\sqrt[3]{2} < x < 0)$	$+$	$-$	$-$
$x > 0 \, (> -\sqrt[3]{2})$	$+$	$+$	$+$

Hallamos:
$f''(x) > 0$ si $x \in \left(-\infty, -\sqrt[3]{2}\right) \cup (0, +\infty) \Rightarrow f$ es cócava hacia arriba ahí;
$f''(x) < 0$ si $x \in \left(-\sqrt[3]{2}, 0\right) \Rightarrow f$ es cócava hacia abajo ahí;
En $x = -\sqrt[3]{2}$ hay un punto de inflexión que es $\left[-\sqrt[3]{2}, f(-\sqrt[3]{2})\right] = \left(-\sqrt[3]{2}, 0\right)$.

d. La función es continua en todo su dominio y en $x = 0$ tiene una discontinuidad esencial infinita.

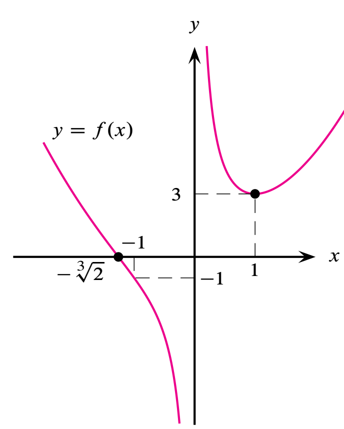
e. Vemos que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = -\infty\,;$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty\,;$$
$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(x^2 + \frac{2}{x}\right) = +\infty\,.$$

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y no tiene asíntotas horizontales.

f. Analizando el cambio de signo de la primera derivada, vemos que en $x = 1$ hay un mínimo local que tiene por coordenadas $(1, 3)$. No existen máximos ni mínimos absolutos.

g. La gráfica de la función f es:



El rango: $R_f = \mathbb{R}$.

□

14. Para la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$, determine:

a. Dominio, raíces, paridad.

b. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión.
d. Intervalos de continuidad y la clasificación de discontinuidades.
e. Ecuaciones de las asíntotas verticales y de las asíntotas horizontales.
f. Máximos y mínimos relativos y absolutos.
g. Esbozo gráfico y rango.

▼

a. Dominio: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.
Raíces: $x = 0$.
Paridad: puesto que $f(2) = \dfrac{2}{1^2} = 2$ y que $f(-2) = \dfrac{-2}{(-3)^2} = -\dfrac{2}{9}$, entonces no se cumple que $f(2) = f(-2)$ ni que $f(2) = -f(-2)$. Es decir, la función no es par ni es impar. Es claro que no puede ser par ni impar pues el dominio no es simétrico con respecto al origen.

b. Derivamos

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(1) - x\,[2(x-1)]}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{(x-1)\,[(x-1)-2x]}{(x-1)^4} = \frac{-x-1}{(x-1)^3} = -\frac{x+1}{(x-1)^3} =$$
$$= -\frac{x+1}{x-1}\frac{1}{(x-1)^2}\,;$$

vemos que el signo de la derivada lo proporciona $x+1$, $x-1$ y el signo exterior. Usamos la tabla siguiente:

	Signo de			
Intervalo	$x+1$	$x-1$	-1	$f'(x)$
$x < -1\ (< 1)$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-1 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x > 1\ (> -1)$	$+$	$+$	$-$	$-$

Concluimos entonces que:
La función es decreciente para $x \in (-\infty, -1)$ y para $x \in (1, +\infty)$.
La función es creciente para $x \in (-1, 1)$.

c. Calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{(x-1)^3(1) - (x+1)\left[3(x-1)^2\right]}{(x-1)^6} =$$
$$= -\frac{(x-1)^2\,[(x-1)-3(x+1)]}{(x-1)^6} = -\frac{-2x-4}{(x-1)^4} =$$
$$= 2\frac{x+2}{(x-1)^4} = (x+2)\frac{2}{(x-1)^4}\,;$$

vemos que el signo de la segunda derivada lo proporciona el factor $x+2$:

$$x+2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < -2 \;\Leftrightarrow\; x \in (-\infty, -2)\,;$$
$$x+2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > -2 \;\Leftrightarrow\; x \in (-2, +\infty)\,.$$

Por lo tanto:
La función es cóncava hacia abajo para $x \in (-\infty, -2)$.
La función es cóncava hacia arriba para $x \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$.
En $x = -2$ hay un punto de inflexión $[-2, f(-2)] = \left(-2, -\dfrac{2}{9}\right)$.

d. La función es continua en su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.
En $x = 1$ encontramos una discontinuidad esencial infinita, pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.

e. Si escribimos

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{x - 2 + \frac{1}{x}} \text{ para } x \neq 0, \text{ vemos que:}$$

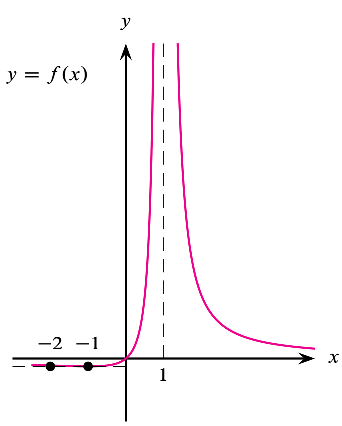
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^-;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+.$$

Por lo tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal de $f(x)$.
También se comprueba que la recta $x = 1$ es asíntota vertical de $f(x)$, pues $\lim\limits_{x \to 1^\pm} f(x) = +\infty$.

f. Punto crítico: $x = -1$, ya que es el único para el que $f'(x) = 0$.
De la tabla anterior [inciso (b)] se desprende que la primera derivada cambia de signo en este punto de negativo a positivo. Con esto podemos decir que en $x = -1$ hay un mínimo local. De hecho, conjuntando información que obtendremos inmediatamente, es un mínimo absoluto.
La función no tiene máximo absoluto.

g. Evaluamos la función f en $x = 1$ y se obtiene $f(-1) = -\dfrac{1}{4}$.
La gráfica de f es:



Rango: $R_f = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$.

□

Ejercicios 9.1.3 *Gráfica de una función con radicales.*

1. Sea $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x + 3)^{\frac{2}{3}}$, determinar D_f; intervalos de monotonía y de concavidad; máximos y mínimos locales, y puntos de inflexión. Usando esta información, dibujar un esbozo de la gráfica de la función f.

▼ Escribamos

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x + 3)^2} = [x(x + 3)^2]^{\frac{1}{3}}.$$

Vemos que $D_f = \mathbb{R}$ y calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(x+3)^2 + 2x(x+3)}{3\sqrt[3]{x^2(x+3)^4}} = \frac{(x+3)[(x+3)+2x]}{3x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} =$$
$$= \frac{3(x+3)(x+1)}{3x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{x+1}{[x^2(x+3)]^{\frac{1}{3}}} \text{ si } x \neq 0 \;\&\; x \neq -3\,.$$

Si $x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}$, el signo de $f'(x)$ nos lo da $\dfrac{x+1}{(x+3)^{\frac{1}{3}}}$ pues $x^{\frac{2}{3}} = (x^{\frac{1}{3}})^2$ es positivo para $x \neq 0$.

Averigüemos pues el signo de $(x+1)(x+3)^{-\frac{1}{3}}$ que es el de $f'(x)$, teniendo en cuenta que $x \in \mathbb{R} - \{0, -3\}$ y que $f'(x) = 0$ si $x = -1$:

	Signo de			
Intervalo	$(x+3)^{-\frac{1}{3}}$	$x+1$	$f'(x)$	f *es*
$x < -3(< -1 < 0)$	$-$	$-$	$+$	creciente
$-3 < x < -1(< 0)$	$+$	$-$	$-$	decreciente
$(-3 <) -1 < x < 0$	$+$	$+$	$+$	creciente
$(-3 < -1 <)0 < x$	$+$	$+$	$+$	creciente

Para hablar de concavidad, tenemos que calcular

$$f''(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{3}(x+1) \times x^{-\frac{4}{3}}(x+3)^{-\frac{2}{3}}[2x(x+3)+x^2]}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^2}} =$$
$$= \frac{3x^2(x+3) - (x+1)(3x^2+6x)}{x^{\frac{4}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}3x^{\frac{4}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3x^3 + 9x^2 - 3x^3 - 6x^2 - 3x^2 - 6x}{3x^{\frac{8}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} =$$
$$= \frac{-6x}{3x^{\frac{8}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{-2}{x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{x^5(x+3)^4}}\,.$$

Determinamos su signo

$$f''(x) > 0 \text{ si } x < 0 \;\&\; x \neq -3 \;\Rightarrow\; f''(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0);$$
$$f''(x) < 0 \text{ si } x > 0.$$

Si $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$, f es cóncava hacia arriba y si $x > 0$, f es cóncava hacia abajo.

Los puntos críticos de f son 0, -1 y -3, ya que $f'(x) = 0$ si $x = -1$, y además $f'(x)$ no existe en $x = 0$ & $x = -3$ donde la función es continua.

Máximos y mínimos:

Tanto a la izquierda como a la derecha de 0, f es creciente; luego, en 0 no hay valor extremo.

Como $f''(-1) > 0$ en -1 hay un mínimo local que vale

$$f(-1) = [-1(-1+3)^2]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-4} \approx -1.587401;$$

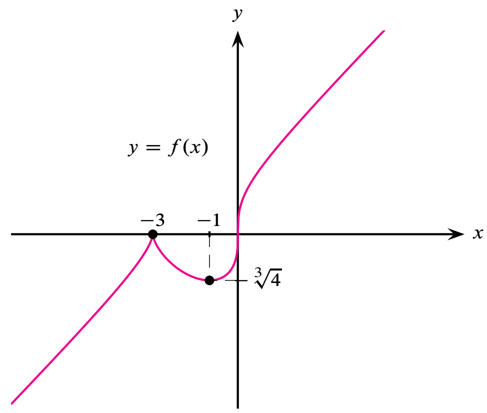
La gráfica de f contiene al punto $(-1, -\sqrt[3]{4})$.

En -3 hay máximo local, pues esta función pasa de ser creciente a decreciente y vale $f(-3) = 0$. Por ser $f'(-3) = +\infty$, en -3 se tiene un pico.

Puntos de inflexión:

Dado que en 0 la segunda derivada cambia de signo y la función es continua, ahí tenemos un punto de inflexión el cual, como $f(0) = 0$, es el origen.

La gráfica de la función f:



□

2. Sea $f(x) = \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}$, determinar los intervalos de monotonía y de concavidad de f; máximos y mínimos locales, y puntos de inflexión.

Usando esta información, esbozar la gráfica de f.

▼ Calculemos la derivada de $f(x) = x^{\frac{2}{5}} - x^{\frac{5}{3}}$:

$$f'(x) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{6 - 25x^{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}}{15x^{\frac{3}{5}}} = \frac{6 - 25x^{\frac{19}{15}}}{15x^{\frac{3}{5}}} \text{ si } x \neq 0.$$

Para $x > 0$, $f(x)$ es creciente si $6 - 25x^{\frac{19}{15}} > 0 \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} < \frac{6}{25} \Leftrightarrow x < \left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}} \approx 0.324$.

La función f es creciente en $\left(0, \left[\frac{6}{25}\right]^{\frac{15}{19}}\right)$.

Y decreciente en $\left(\left[\frac{6}{25}\right]^{\frac{15}{19}}, +\infty\right)$.

Análogamente para $x < 0$:

$$f \text{ es decreciente si } 6 - 25x^{\frac{19}{15}} < 0 \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} > \frac{6}{25} \Leftrightarrow x > \left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}}.$$

Pero como $\left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}} > 0$, f nunca es creciente para $x < 0$, y sí es decreciente en $(-\infty, 0)$.

Calculemos ahora la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{-25\frac{19}{15}x^{\frac{4}{15}} \times 15x^{\frac{3}{5}} - 15\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\left(6 - 25x^{\frac{19}{15}}\right)}{225x^{\frac{6}{5}}} = \frac{-475x^{\frac{13}{15}} - 54x^{-\frac{2}{5}} + 225x^{\frac{13}{15}}}{225x^{\frac{6}{5}}} =$$
$$= \frac{-475x^{\frac{19}{15}} - 54 + 225x^{\frac{19}{15}}}{225x^{\frac{8}{5}}} = \frac{-250x^{\frac{19}{15}} - 54}{225x^{\frac{8}{5}}}.$$

Como $x^{\frac{8}{5}} > 0$, siempre que $x \neq 0$, el numerador $-250\,x^{\frac{19}{15}} - 54$ no da el signo de la segunda derivada. La función f es cóncava hacia arriba si

$$-250\,x^{\frac{19}{15}} - 54 > 0 \Leftrightarrow 250\,x^{\frac{19}{15}} < -54 \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} < -\frac{54}{250} \Leftrightarrow x < -\left(\frac{54}{250}\right)^{\frac{15}{19}} = -\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{15}{19}}.$$

Es decir, si $x \in \left(-\infty, -\left[\frac{27}{125}\right]^{\frac{15}{19}}\right)$.

Y es convexa si $x \in \left(-\left[\frac{27}{125}\right]^{\frac{15}{19}}, 0\right)$ o bien $x \in (0, +\infty)$.

Calculemos los puntos críticos, además de $x = 0$, donde la función f tiene un mínimo relativo, el origen $(0, 0)$, pues ahí pasa de ser decreciente a ser creciente:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 25x^{\frac{19}{15}} = 0 \Leftrightarrow 6 = 25x^{\frac{19}{15}} \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} = \frac{6}{25} \Leftrightarrow x = \left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}}.$$

donde la función f tiene un máximo relativo, pues ahí la función pasa de ser creciente a ser decreciente en el punto

$$\left(\left[\frac{6}{25}\right]^{\frac{15}{19}}, \left[\frac{6}{25}\right]^{\frac{6}{19}} - \left[\frac{6}{25}\right]^{\frac{25}{19}}\right) \approx (0.324, 0.484).$$

Los puntos de inflexión se obtienen donde la segunda derivada cambia de signo; es decir, calculemos cuando $f''(x) = 0$:

$$-250x^{\frac{19}{15}} - 54 = 0 \Leftrightarrow 250x^{\frac{19}{15}} = -54 \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} = -\frac{54}{250} \Leftrightarrow x = -\left(\frac{54}{250}\right)^{\frac{15}{19}} = -\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{15}{19}}.$$

y donde la función f tiene un punto de inflexión, pues en el punto $\left(-\left[\frac{27}{125}\right]^{\frac{15}{19}}, \left[\frac{27}{125}\right]^{\frac{6}{19}} + \left[\frac{27}{125}\right]^{\frac{25}{19}}\right) \approx$ $(-0.298, 0.749)$ la curva gráfica de $f(x)$ pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo o convexa.

Encontramos que:

La función f es creciente en $(0, 0.32411)$.

Esta función f es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0.32411, +\infty)$.

Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -0.298242)$.

Es cóncava hacia abajo en $(-0.298242, 0) \cup (0, +\infty)$.

$(0, 0)$ es un mínimo local; en $x = 0$ la tangente es vertical.

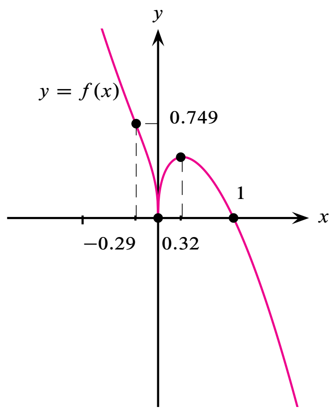
La gráfica tiene un pico, ya que $f'(0^{\pm}) = \pm\infty$.

$(0.324, 0.484)$ es un máximo local;

$(-0.298242, 0.7494817)$ es punto de inflexión;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x^6 = x^{25} \Leftrightarrow x^6(x^{19} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \,\&\, x^{19} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \,\&\, x = 1$ son las raíces de f.

Dibujamos ahora la gráfica de la función f:



□

3. Considere la función $f(x) = 4x - \sqrt{2x-1}$. Determinar:

   a. Dominio, raíces, intervalos de continuidad.
   b. Intervalos de monotonía y puntos extremos.
   c. Intervalos de concavidad.
   d. Bosquejo gráfico. Proporcione el rango.

▼

a. Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x - 1 \geq 0 \right\} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow D_f = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Raíces:

$$4x - \sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 4x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 16x^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-64}}{32}.$$

Que no son reales, pues $4 - 64 < 0$: la función no tiene raíces reales. De hecho $f(x) > 0$ siempre.

Continuidad:
La función es continua en todo su dominio.

b. Primera derivada:

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x-1}} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 1 > \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2x > \frac{17}{16} \Leftrightarrow x > \frac{17}{32} \Rightarrow f(x) \text{ es creciente en } \left(\frac{17}{32}, +\infty\right)$$

así como

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{17}{32} \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } \left(\frac{1}{2}, \frac{17}{32}\right).$$

Luego,

$$f'(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 32x - 16 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{17}{32}$$

así como

$$f''(x) = [4 - (2x-1)^{-1/2}]' = \frac{2}{2(2x-1)^{3/2}} = \frac{1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{17}{32}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{17}{16} - 1\right)^3}} > 0\,.$$

Existe un único punto crítico y sus coordenadas son:

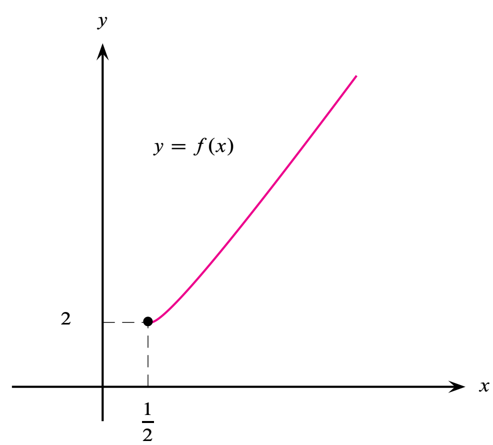
$$x = \frac{17}{32},\ y = \frac{17}{8} - \sqrt{\frac{17}{16} - 1} = \frac{17}{8} - \frac{1}{4} = \frac{15}{8}; \text{ se trata de un mínimo local absoluto.}$$

c. Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1}{(2x-1)^{\frac{3}{2}}} > 0 \text{ para } x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Luego, la función es cóncava hacia arriba.

d. La gráfica de la función f:



Rango: $R_f = \left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$.

□

4. Para la función $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x+3)$ determine:

a. Dominio y raíces.
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Máximos y mínimos relativos.
d. Intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo.

e. Puntos de inflexión.
f. Máximos y mínimos absolutos (si los hubiese).
g. Gráfica de la función.

▼

a. Dominio: $D_f = \mathbb{R}$.
Raíces: $x = 0$ & $x = -3$.

b. Derivamos para conocer los intervalos de monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}(x+3) + x^{\frac{1}{5}} = \frac{x+3+5x}{5x^{\frac{4}{5}}} = \\ = \frac{6x+3}{5x^{\frac{4}{5}}} = \frac{3}{5} \times \frac{2x+1}{x^{\frac{4}{5}}}.$$

El signo de la primera derivada lo da $2x+1$. Vemos que $x = -\frac{1}{2}$ y también $x = 0$ son puntos críticos;

La función f es decreciente si $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

la función f es creciente si $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

c. Por lo anterior $x = -\frac{1}{2}$ es un mínimo local, basándonos en el criterio de la primera derivada. En $x = 0$ no hay valor extremo, ya que en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y en $(0, +\infty)$ la función es creciente.

d. Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{3}{5}\left[\frac{x^{\frac{4}{5}} \times 2 - (2x+1) \times \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}}{x^{\frac{8}{5}}}\right] = \frac{6}{5} \times \frac{x^{\frac{4}{5}} - \dfrac{4x+2}{5x^{\frac{1}{5}}}}{x^{\frac{8}{5}}} = \\ = \frac{6}{5} \times \frac{\dfrac{5x-4x-2}{5x^{\frac{1}{5}}}}{x^{\frac{8}{5}}} = \frac{6}{25} \times \frac{x-2}{x^{\frac{9}{5}}} = \\ = \frac{6}{25} \times \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} \times \frac{x-2}{x};$$

vemos entonces que x & $x-2$ son los que dan el signo de la segunda derivada. Puesto que se anulan en $x = 0$ y en $x = 2$, nos ayudamos de la tabla siguiente para conocer los intervalos de concavidad de la función $f(x)$:

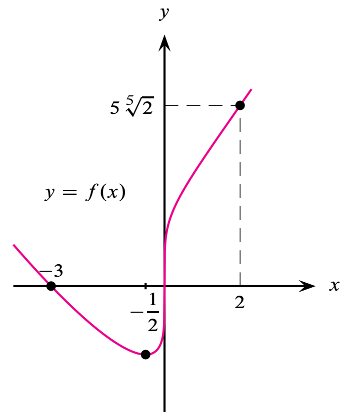
	Signo de		
Intervalo	x	$x-2$	$f''(x)$
$x < 0\,(< 2)$	$-$	$-$	$+$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$-$
$x > 2\,(> 0)$	$+$	$+$	$+$

La función f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
La función f es cóncava hacia abajo en $(0, 2)$.

e. Por lo anterior, en $x = 0$ y en $x = 2$ cambia la concavidad, y por lo tanto $(0, 0)$ y $(2, 5\sqrt[5]{2}) \approx (2, 5.74)$ son puntos de inflexión.

f. En $x = -\dfrac{1}{2}$ tiene un mínimo absoluto.
Esta función f no tiene máximo absoluto pues $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

g. La gráfica de la función f es:



□

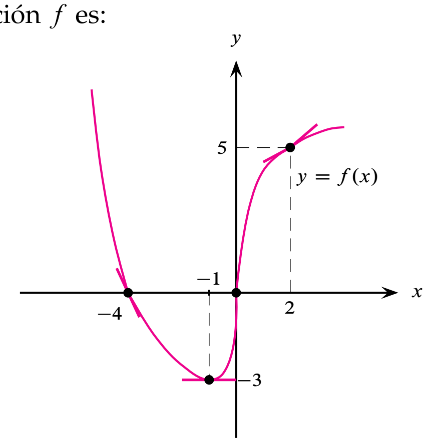
9.2 Interpretación de gráficas y símbolos

Ejercicios 9.2.1 *Gráfica de una función sujeta a ciertas condiciones.*

1. Bosquejar la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

a. $f(-4) = 0$;
b. $f'(-4) = -1$;
c. $f(-1) = -3$;
d. $f'(-1) = 0$;
e. $f(2) = 5$;
f. $f'(2) = 1$;
g. $f(0) = 0$;
h. $f'(0)$ no existe;
i. $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$;
j. $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1)$;
k. $f'(x) > 0$ si $x \in [-1, +\infty) - \{0\}$;
l. $f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0)$;
m. $f''(x) < 0$ si $x \in (0, +\infty)$.

▼ Un gráfica posible de la función f es:

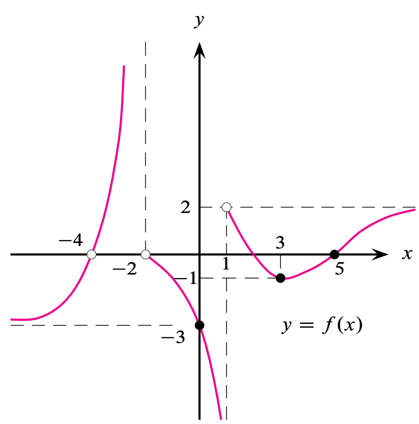


□

2. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumple los requisitos siguientes:

a. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$;
b. $\lim_{x\to-4} f(x) = 0$;
c. $\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$;
d. $f'(x) > 0$ para $x < -2$;
e. $f''(x) > 0$ para $x < -2$;
f. $\lim_{x\to-2^+} f(x) = 0$;
g. $f(0) = -3$;
h. $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$;
i. $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;
j. $f''(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;
k. $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2$;
l. $f(3) = -1$;
m. $f'(3) = 0$;
n. $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$;
o. $f'(x) > 0$ para $x > 3$;
p. $f''(x) > 0$ para $1 < x < 5$;
q. $f(5) = 0$;
r. $f''(x) < 0$ para $x > 5$;
s. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

▼ Un bosquejo posible de la gráfica de f es el siguiente:



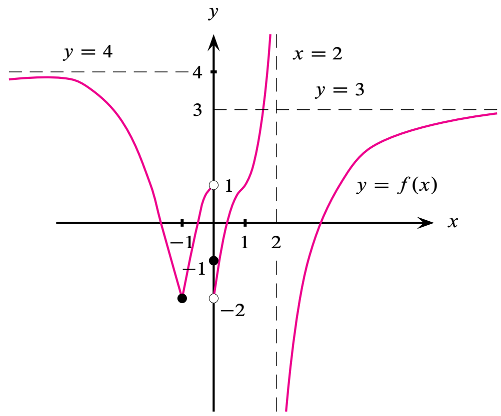
□

3. Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

a. $\lim_{x\to0^+} f(x) = -2$;
b. $\lim_{x\to0^-} f(x) = 1$;
c. $f(0) = -1$;
d. $\lim_{x\to2^-} f(x) = +\infty$;
e. $\lim_{x\to2^+} f(x) = -\infty$;
f. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$;
g. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$;
h. $f(-1) = -2$;
i. $f'(-1)$ no existe;
j. $f''(1) = 0$;
k. $f''(x) < 0$ para $0 < x < 1$;
l. $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

▼ Por las condiciones dadas: la recta $x = 2$ es una asíntota vertical, las rectas $y = 3$ así como $y = 4$ son asíntotas horizontales, la gráfica tiene un pico en $x = -1$ y finalmente podemos considerar que existe un punto de inflexión en $x = 1$.

Una posible gráfica de f es:



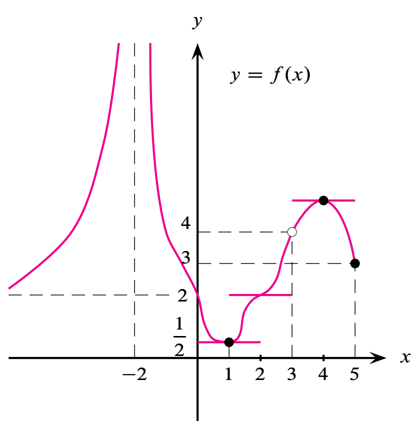
□

4. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $(-\infty, 5] - \{-2, 3\}$ y que satisfaga:

- $f(5) = 3$;
- $f(1) = \dfrac{1}{2}$;
- $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = +\infty$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(2) = 0$;
- $f'(4) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -2)$;
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$;
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 4) - \{3\}$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (4, 5)$.

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

▼ Una gráfica posible de la función f es:



La función es cóncava hacia arriba en $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, \dfrac{3}{2}\right) \cup (2, 3)$.

La función es cóncava hacia abajo en $x \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right) \cup (3, 5)$.

En $x = 1$ hay un mínimo local. Es también un mínimo absoluto.

En $x = 4$ hay un máximo local.

La función no tiene máximos absolutos.

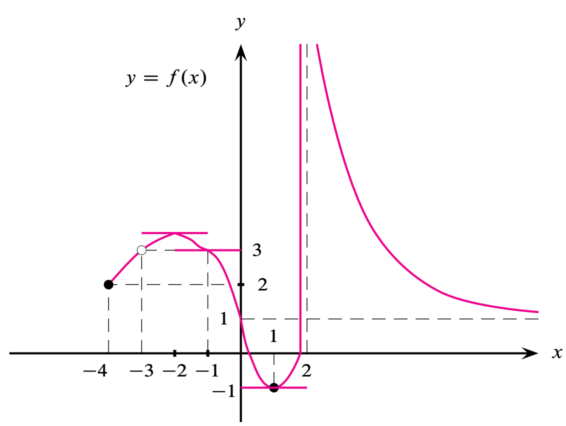
□

5. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $[-4, +\infty) - \{-3, 2\}$ y que satisfaga:

- $f(-4) = 2$;
- $f(1) = -1$;
- $\lim_{x \to -3} f(x) = 3$;
- $f'(-2) = 0$;
- $f'(-1) = 0$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) - \{-3\}$;
- $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1) - \{-1\}$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 2)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (2, \infty)$.

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

▼ Una gráfica posible de la función f es:



La función f es cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$.

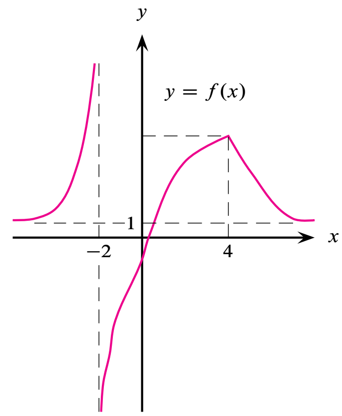
Es cóncava hacia abajo en $\left(-4, -\dfrac{3}{2}\right)$ y en $(-1, 0)$.

Hay un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 1$ que además es mínimo absoluto. □

6. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumpla las siguientes condiciones:

- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 4)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in (4, +\infty)$;
- tiene asíntota vertical en $x = -2$;
- $y = 1$ es asíntota horizontal de f.

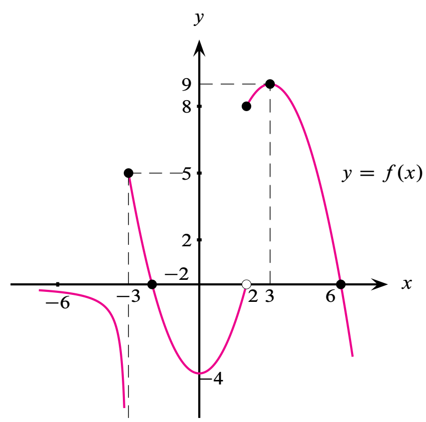
▼ Bosquejo la gráfica de la función $f(x)$, con las condiciones dadas:



□

Ejercicios 9.2.2 *Interpretar la gráfica de una función.*

1. Considere la siguiente gráfica de la función f



y determine:

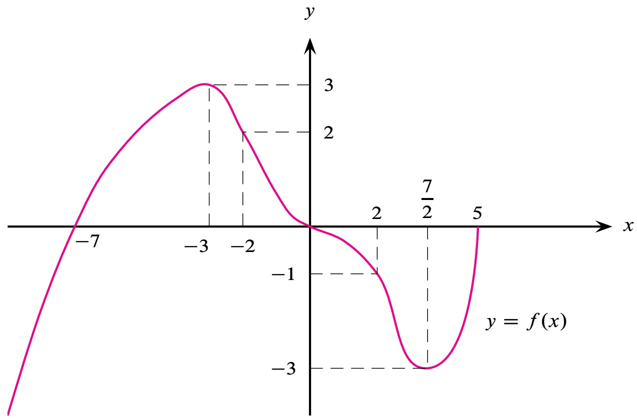
a. Los puntos donde la derivada no existe.
b. Los puntos donde $f'(x) = 0$.
c. Los intervalos donde $f'(x) > 0$.
d. Los intervalos donde $f'(x) < 0$.
e. Los intervalos donde $f''(x) > 0$.
f. Los intervalos donde $f''(x) < 0$.

▼

a. f' no existe en $x = -3$ & $x = 2$.
b. $f'(x) = 0$ en $x = 0$ & $x = 3$.
c. $f' > 0$ en $(0, 2)$ & $(2, 3)$.
d. $f' < 0$ en $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ y $(3, +\infty)$.
e. $f'' > 0$ en $(-3, 2)$.
f. $f'' < 0$ en $(-\infty, -3)$ y $(2, +\infty)$.

□

2. Si la gráfica de f es



halle:

a. Dominio, raíces, paridad y rango.
b. Monotonía, máximos y mínimos locales y absolutos.
c. Concavidad y puntos de inflexión.
d. Intervalos donde $f'(x) > 0$, donde $f'(x) < 0$, donde $f''(x) > 0$ y donde $f''(x) < 0$.
e. Puntos donde $f'(x) = 0$ e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.

▼

a. Dominio: $D_f = (-\infty, 5]$.
Raíces: $x = -7$, $x = 0$ & $x = 5$.
No es par ni impar.
Rango: $R_f = (-\infty, 3]$.

b. Es creciente en $(-\infty, -3)$ y en $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$.

Y decreciente en $\left(-3, \frac{7}{2}\right)$.

Tiene un máximo local en $(-3, 3)$ y un mínimo local en $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$; $(-3, 3)$ es máximo absoluto y no tiene mínimo absoluto.

c. Es cóncava hacia arriba en $(-2, 0)$ y en $(2, 5)$
y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$; los puntos de inflexión son $(-2, 2)$, $(0, 0)$ y $(2, -1)$.

d. $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -3)$ y en $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$;

$f'(x) < 0$ en $(-3, 0)$ y en $\left(0, \frac{7}{2}\right)$;

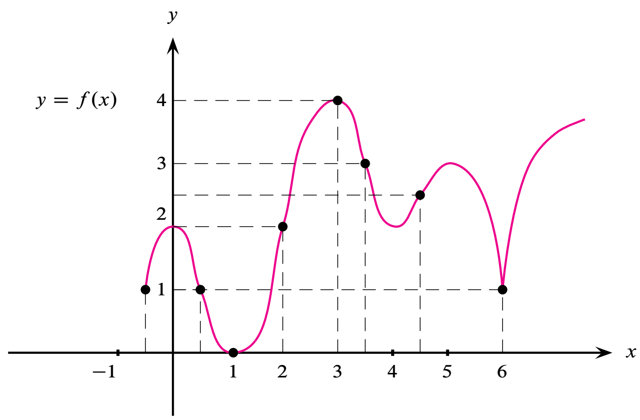
$f''(x) > 0$ en $(-2, 0)$ y en $(2, 5)$;
$f''(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$.

e. $f'(x) = 0$ en $(-3, 3)$, en $(0, 0)$ y en $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$;

$f(x) > 0$ en $(-7, 0)$;
$f(x) < 0$ en $(-\infty, -7)$ y en $(0, 5)$.

□

3. A partir de la gráfica dada de f, cuyo dominio es $[-0.5, \infty)$



determine:

a. Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.
b. Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo.
c. Los máximos y mínimos relativos, los máximos y mínimos absolutos, y los puntos de inflexión.

▼

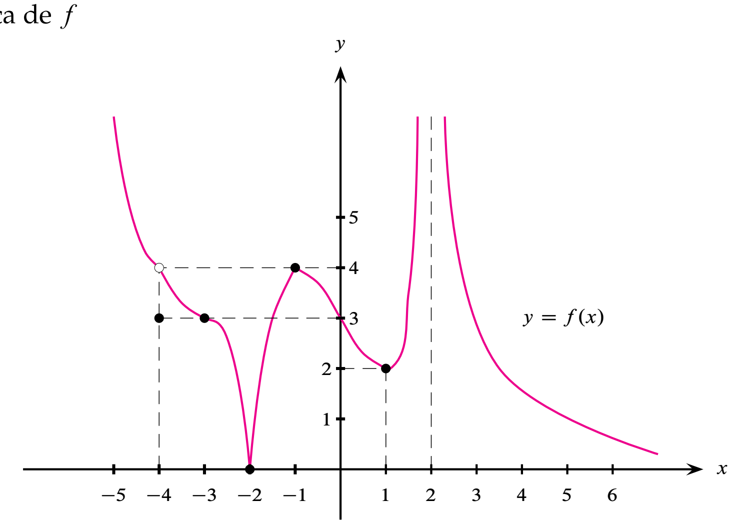
a. La función f es creciente en $[-0.5, 0]$, $[1, 3]$, $[4, 5]$ y en $[6, +\infty)$;
la función f es decreciente en $[0, 1]$, $[3, 4]$ y en $[5, 6]$.

b. La función f es cóncava hacia arriba en $[0.5, 2]$ y en $[3.5, 4.5]$;
la función f es cóncava hacia abajo en $[-0.5, 0.5]$, $[2, 3.5]$ y $[4.5, +\infty]$

c. Los máximos relativos son $(0, 2)$, $(3, 4)$ y $(5, 3)$.
Los mínimos relativos son $(1, 0)$, $(4, 2)$ y $(6, 1)$.
No tiene máximo absoluto y el mínimo absoluto es $(1, 0)$.
Los puntos de inflexión son $(0.5, 1)$, $(2, 2)$, $(3.5, 3)$ y $(4.5, 2.5)$.

□

4. A partir de la gráfica de f



determine el conjunto de puntos del dominio de f que satisfacen:

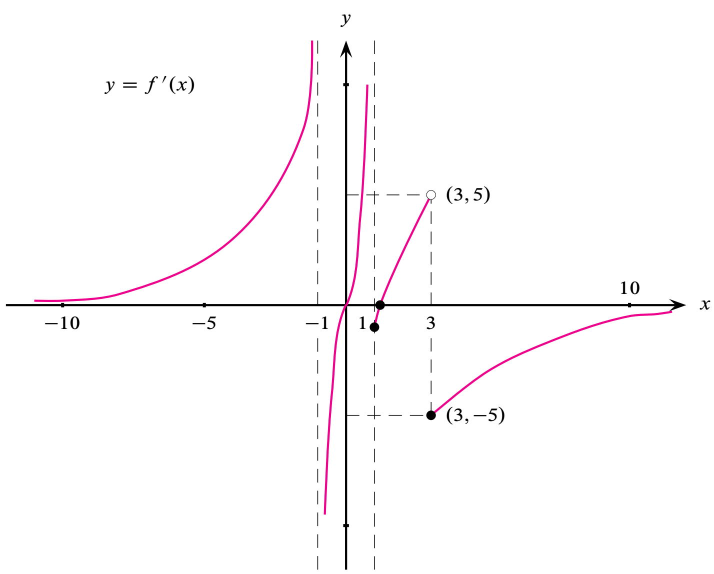
a. $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$.
b. $f'' > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$.
c. $f'(x)$ no existe.

▼

a. $f'(x) > 0$ para $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$;
$f'(x) = 0$ si $x = -3, -1$ & 1 ;
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.
b. $f'' > 0$ si $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$;
$f'' = 0$ si $x = -3$ & $x = 0$;
$f'' < 0$ si $x \in (-3, -2) \cup (-2, 0)$.
c. En $x = -4$, $x = -2$ & $x = 2$ no existe la derivada.

□

5. La figura siguiente muestra la gráfica de la derivada de una función f la cual es continua en todos los reales.



A partir de ella, determine:

a. Intervalos donde f es creciente o decreciente.
b. Puntos críticos de f.
c. Extremos relativos de f.
d. Concavidad de f.
e. Abscisas de los puntos de inflexión de f.

▼

a. La función f es creciente donde $f' > 0$, lo cual sucede en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ y $(1.2, 3)$. La función f es decreciente donde $f' < 0$, lo cual sucede en los intervalos $(-1, 0)$, $(1, 1.2)$ y $(3, +\infty)$.
b. La función f tiene puntos críticos donde $f' = 0$, lo que sucede en $x = 0$ y en $x = 1.2$, o en puntos del dominio de f donde f' no existe, lo cual sucede en $x = -1$.

c. Debido a que $f'(x) < 0$, f es decreciente en el intervalo $(-1, 0)$; $f'(0) = 0$; f es creciente en el intervalo $(0, 1)$, ya que $f'(x) > 0$; entonces se puede afirmar (por el criterio de la primera derivada) que la función f tiene en $x = 0$ un mínimo local estricto.

   Análogamente por ser f decreciente en el intervalo $(1, 1.2)$; $f'(1.2) = 0$ y, puesto que f es creciente en el intervalo $(1.2, 3)$, se puede afirmar (por el criterio de la primera derivada) que la función f tiene también en $x = 1.2$ un mínimo local estricto. En $x = -1$ podría haber un máximo local estricto en el caso en que $x = -1$ estuviese en el dominio de f.

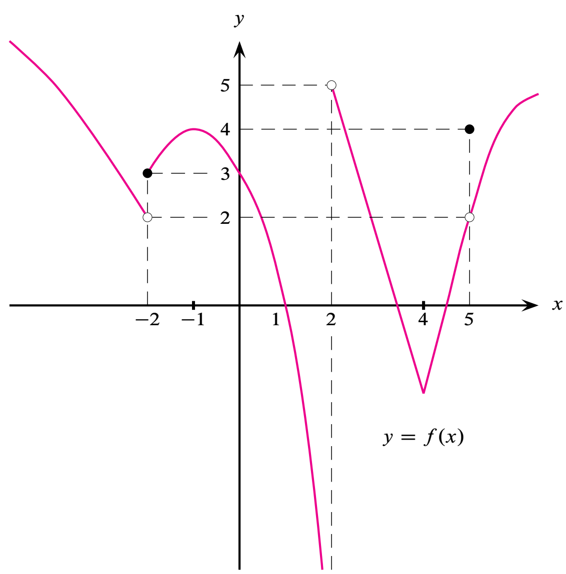
d. La función f es cóncava hacia arriba donde $f'' > 0$, es decir, donde f' es creciente.

   En este caso, f' es creciente en todo su dominio, por lo cual f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

e. Por no existir cambios de concavidad, f no tiene puntos de inflexión.

□

6. Sea f la función que tiene la siguiente gráfica



determine:

a. Los intervalos de continuidad y los siguientes valores

$$\lim_{x\to a^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x),\ \lim_{x\to a} f(x)\ \&\ f(a)$$

   para $a = -2, a = 2, a = 5$.

b. La clasificación de discontinuidades. ¿En cuáles puntos y con qué valores se puede redefinir f para convertirla en una función continua en esos puntos?

c. Los intervalos donde $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y los puntos donde $f'(x) = 0$, o donde no existe la derivada.

▼

a. La función es continua en

$$(-\infty, -2) \cup [-2, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)\,.$$

   Tenemos

   $\lim_{x\to -2^-} f(x) = 2$; $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 3$; $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe; $f(-2) = 3$;

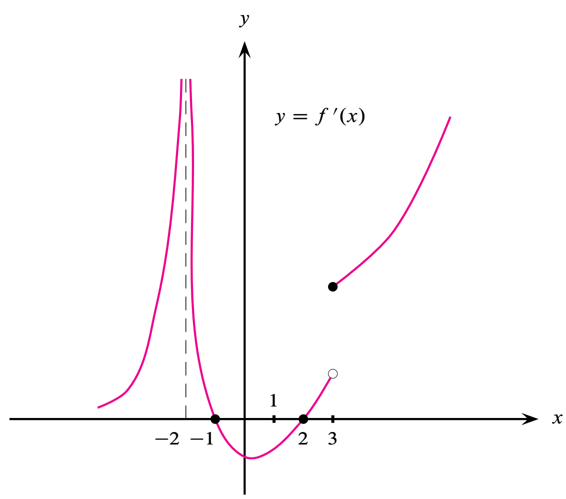
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe; $f(2)$ no está definido;
$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 2$; $f(5) = 4$.

b. En $x = -2$ se tiene una discontinuidad de salto.
En $x = 2$ se tiene una discontinuidad esencial infinita.
En $x = 5$ se tiene una discontinuidad removible. Si redefinimos la función como $f(5) = 2$, la función se hace continua para $x = 5$.

c. $f'(x) < 0$ en$(-\infty, -2)$, $(-1, 2)$ y en $(2, 4)$;
$f'(x) > 0$ en $(-2, -1)$ y en $(4, +\infty) - \{5\}$;
$f'(x) = 0$ en $x = -1$;
$f'(x)$ no existe en $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$ ni en $x = 5$.

□

7. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ cuya primera derivada f' tiene la siguiente gráfica:



Determinar dónde la función f es creciente y dónde es decreciente. Explicar además, cómo es la tangente a la gráfica de f en $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$ & $x = 3$.

▼ La función es creciente cuando la derivada es positiva, esto es, para $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, +\infty)$.

La función es decreciente cuando la derivada es negativa, es decir, para $x \in (-1, 2)$.

En $x = -2$ la tangente es vertical.

En $x = -1$ la tangente es horizontal, paralela al eje x, con pendiente cero.

De hecho tiene aquí un máximo local porque la derivada cambia de signo de positivo a negativo.

En $x = 2$ la tangente es horizontal, paralela al eje x, con pendiente cero.

De hecho tiene aquí un mínimo local porque la derivada cambia de signo de negativo a positivo.

□

CAPÍTULO

10

Optimización

10.1 Problemas de optimización

Problemas de optimización

Ejercicios 10.1.1

1. Hallar dos números positivos cuya suma sea S y cuyo producto sea máximo.

▼ Sean x & y los números positivos que cumplen la restricción dada

$$x + y = S, \text{ donde}$$

S (la suma) es una constante. Y sea

$$P = xy$$

el producto de ambos números. Deseamos encontrar los números que hacen máximo este producto con la restricción anterior. Despejando de la restricción:

$$y = S - x.$$

Sustituyendo por lo anterior en el producto obtenemos una función de una sola variable.

$$P = x(S - x) = Sx - x^2.$$

Derivando se obtiene:

$$P' = S - 2x;$$
$$P'' = -2.$$

La segunda derivada es siempre negativa para toda x.

Para encontrar los puntos críticos:

$$P' = 0 \Rightarrow S - 2x = 0 \Rightarrow 2x = S \Rightarrow x = \frac{S}{2}.$$

Ya que

$$P''\left(\frac{S}{2}\right) = -2 \text{ en } x_{max} = \frac{S}{2} \text{ tenemos un máximo.}$$

Además

$$y_{max} = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2}.$$

Observación. Ambos números x_{max} & y_{max} son iguales. □

2. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y cuya suma sea mínima.

▼ Sean x & y dichos números positivos que cumplen la restricción dada

$$xy = P,$$

donde P (el producto) es una constante. Y sea

$$S = x + y$$

la suma de ambos números. Deseamos encontrar los números que hacen mínima esta suma con la restricción anterior. Despejando de la restricción:

$$y = \frac{P}{x}$$

Sustituyendo por lo anterior en la suma obtenemos una función de una sola variable.

$$S = x + \frac{P}{x}.$$

Derivando se obtiene:

$$S' = 1 - \frac{P}{x^2};$$
$$S'' = \frac{2P}{x^3}.$$

La segunda derivada siempre es positiva, puesto que x es positivo.

Para encontrar los puntos críticos:.

$$S' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{P}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - P}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - P = 0 \Rightarrow x^2 = P \Rightarrow x = \sqrt{P}.$$

Ya que

$$S''(\sqrt{P}) = \frac{2P}{(\sqrt{P})^3} > 0, \text{ en } x_{min} = \sqrt{P} \text{ tenemos un mínimo.}$$

Además,

$$y_{min} = \frac{P}{\sqrt{P}} = \sqrt{P}.$$

Observación. Ambos números x_{min} & y_{min} son iguales. □

3. Hallar dos números positivos cuyo producto sea P y la suma del primero más tres veces el segundo sea mínima.

▼ Sean x el primero & y el segundo de dichos números positivos que cumplen con la restricción dada

$$xy = P,$$

donde P (el producto) es una constante. Y sea

$$S = x + 3y$$

la suma del primero mas el triple del segundo. Deseamos encontrar los números que hacen mínima esta suma con la restricción anterior. Despejando de la restricción:

$$y = \frac{P}{x}.$$

Sustituyendo esto en la suma obtenemos una función de una sola variable.

$$S = x + 3\frac{P}{x}.$$

Derivando:

$$S' = 1 - 3\frac{P}{x^2};$$
$$S'' = 6\frac{P}{x^3}.$$

La segunda derivada siempre es positiva, puesto que x es positivo.

Para encontrar los puntos críticos:

$$S' = 0 \Rightarrow 1 - 3\frac{P}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3P}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 3P = 0 \Rightarrow x^2 = 3P \Rightarrow x = \sqrt{3P}.$$

Ya que

$$S''(\sqrt{3P}) = \frac{6P}{(\sqrt{3P})^3} > 0 \Rightarrow \text{hay un mínimo en } x_{min} = \sqrt{3P};$$
$$y_{min} = \frac{P}{\sqrt{3P}} = \frac{1}{3}\frac{3P}{\sqrt{3P}} = \frac{1}{3}\sqrt{3P} = \frac{1}{3}x_{min}.$$

□

4. Hallar dos números positivos tales que el segundo número sea el inverso multiplicativo del primero y la suma sea mínima.

▼ Sean x & y dichos números positivos que cumplen con la restricción dada

$$y = \frac{1}{x}.$$

La suma de ambos números es

$$S = x + y.$$

Deseamos encontrar los números que hacen mínima esta suma con la restricción anterior.

Sustituyendo $y = \dfrac{1}{x}$ en la suma obtenemos una función de una sola variable:

$$S = x + \frac{1}{x}.$$

Derivando se obtiene:

$$S' = 1 - \frac{1}{x^2};$$
$$S'' = \frac{2}{x^3}.$$

La segunda derivada siempre es positiva, puesto que x es positivo.

Para encontrar los puntos críticos:

$$S' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Ya que

$$S''(1) = \frac{2}{(1)^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{hay un mínimo en } x_{min} = 1,$$

además

$$y_{min} = \frac{1}{1} = 1.$$

Observación. Ambos números x_{min} y y_{min} son iguales. □

5. Hallar dos números positivos tales que el primero más n veces el segundo sumen S y el producto sea máximo.

▼ Sean x & y dichos números positivos que cumplen con la restricción dada

$$x + ny = S,$$

donde S es una constante. Sea también

$$P = xy$$

el producto de ambos números. Deseamos encontrar los números que hacen máximo este producto con la restricción anterior.

Despejando x de la restricción

$$x = S - ny.$$

Sustituyendo en el producto obtenemos una función de una sola variable, en este caso y.

$$P = (S - ny)y = Sy - ny^2.$$

Derivando:

$$P' = S - 2ny;$$
$$P'' = -2n.$$

La segunda derivada es siempre negativa, pues $n > 0$.

Para encontrar los puntos críticos:

$$P' = 0 \Rightarrow S - 2ny = 0 \Rightarrow 2ny = S \Rightarrow y = \frac{S}{2n};$$

Ya que

$$P''\left(\frac{S}{2n}\right) = -2n < 0 \Rightarrow \text{hay un máximo en } y_{max} = \frac{S}{2n};$$
$$x_{max} = S - n\frac{S}{2n} = S - \frac{S}{2} = \frac{S}{2} = ny_{max}.$$

□

6. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

▼ Sean x, y, z los tres números, entonces claramente lo que tenemos que maximizar es el producto xyz. Como aparecen tres variables, vamos a tratar de expresarlo en términos de una única variable, x por ejemplo. Para ello tenemos un par de condiciones adicionales:

$$x + y + z = 30; \quad \text{(E1)}$$
$$x + 2y + 3z = 60; \quad \text{(E2)}$$
$$\text{de } x + y + z = 30 \Rightarrow z = -x - y + 30. \quad (*)$$

Sustituimos z en (E2)

$$x + 2y + 3z = 60 \Rightarrow x + 2y + 3(-x - y + 30) = 60 \Rightarrow -2x - y = 60 - 90 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + y = 30 \Rightarrow y = 30 - 2x.$$

Sustituyendo esta expresión en (*) queda

$$z = -x - 30 + 2x + 30 \Rightarrow z = x.$$

Por último, la función a maximizar es

$$xyz = x^2(30 - 2x) = 30x^2 - 2x^3, \text{ esto es } f(x) = -2x^3 + 30x^2.$$

Ya expresado en función de una sola variable, se puede buscar un máximo hallando los puntos críticos de de la función f, ($f'(x) = 0$).

$$f'(x) = -6x^2 + 60x = -6x(x - 10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = 10.$$

Calculando la segunda derivada,

$$f''(x) = -12x + 60 \Rightarrow f''(10) < 0.$$

Por lo que en $x = 10$ se tiene un máximo.

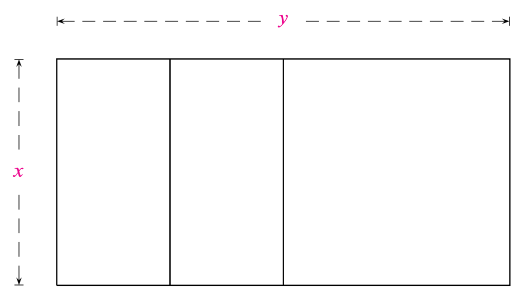
Entonces $z = 10$ & $y = 30 - (2 \times 10) = 30 - 20 = 10$, es decir:

$$x = y = z = 10.$$

□

7. Un granjero que tiene 24 m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en tres corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los tres corrales?

▼



El total de la cerca que se tiene, según la figura, es:

$$24 = 2y + 4x.$$

El área de los 3 corrales es:

$$A = xy.$$

Deseamos encontrar las dimensiones de la cerca que hacen esta área máxima.

Despejamos y de la restricción anterior

$$y = \frac{24 - 4x}{2} = 12 - 2x.$$

Sustituyendo en A obtenemos una función de una variable.

$$A = x(12 - 2x) = 12x - 2x^2.$$

Derivamos:

$$A' = 12 - 4x;$$
$$A'' = -4.$$

Observación. L segunda derivada siempre es negativa.

Para obtener los puntos críticos:

$$A' = 0 \Rightarrow 12 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3.$$

Además

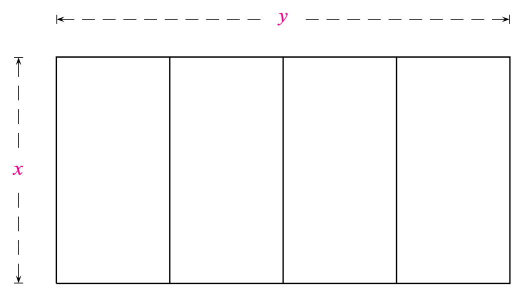
$$A''(3) = -4 < 0 \Rightarrow \text{ en } x_{max} = 3 \text{ hay un máximo;}$$
$$y_{max} = 12 - 6 = 6 = 2x_{max}.$$

El área total máxima de los tres corrales es:

$$A = 6 \times 3 = 18.$$

□

8. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en cuatro corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los cuatro corrales?
▼



El total de la cerca que se tiene, según la figura es:

$$C = 2y + 5x.$$

Deseamos encontrar las dimensiones de la cerca que hacen máxima el área.
El área rectangular total es A = xy.
Despejamos y de la restricción anterior:

$$y = \frac{C - 5x}{2} = \frac{C}{2} - \frac{5}{2}x.$$

Sustituyendo en A obtenemos una función de una variable.

$$A = x\left(\frac{C}{2} - \frac{5}{2}x\right) = \frac{C}{2}x - \frac{5}{2}x^2.$$

Derivamos:

$$A' = \frac{C}{2} - 5x;$$
$$A'' = -5.$$

Observación. La segunda derivada siempre es negativa.

Para obtener los puntos críticos:

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{C}{2} - 5x = 0 \Rightarrow 5x = \frac{C}{2} \Rightarrow x = \frac{C}{10}.$$

Además

$$A''\left(\frac{C}{10}\right) = -5 < 0 \Rightarrow \text{en } x = \frac{C}{10} \text{ hay un máximo;}$$
$$y_{max} = \frac{C}{2} - \frac{5}{2}\frac{C}{10} = \frac{C}{2} - \frac{C}{4} = \frac{C}{4} = \frac{5}{2}\frac{C}{10} = \frac{5}{2}x_{max}.$$

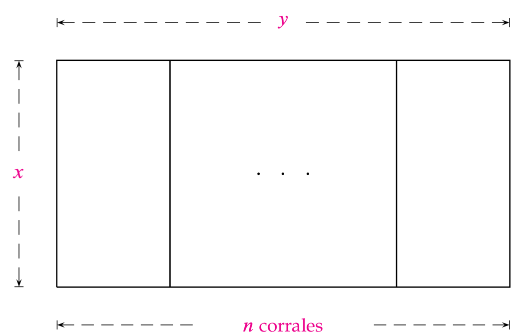
El área máxima para los cuatro corrales es:

$$A = \frac{C}{10}\frac{C}{4} = \frac{C^2}{40}.$$

□

9. Un granjero que tiene C m de cerca desea encerrar un área rectangular y dividirla en n corrales, colocando cercas paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Cuál es el área total máxima posible de los n corrales?

▼



El total C de la cerca que se tiene, según la figura es:

$$C = 2y + (n+1)x.$$

Deseamos encontrar las dimensiones de la cerca que hacen máxima el área. El área es:

$$A = xy.$$

Despejamos y de la restricción anterior

$$y = \frac{C-(n+1)x}{2} = \frac{C}{2} - \frac{n+1}{2}x.$$

Sustituyendo en A obtenemos una función de una variable.

$$A = x\left(\frac{C}{2} - \frac{n+1}{2}x\right) = \frac{C}{2}x - \frac{n+1}{2}x^2.$$

Derivamos:

$$A' = \frac{C}{2} - (n+1)x;$$
$$A'' = -(n+1).$$

Observación. La segunda derivada siempre es negativa.

Para obtener los puntos críticos:

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{C}{2} - (n+1)x = 0 \Rightarrow (n+1)x = \frac{C}{2} \Rightarrow x = \frac{C}{2(n+1)}.$$

Además, como $A'' < 0$, entonces en

$$x = \frac{C}{2(n+1)} \text{ se tiene un máximo. Y también,}$$

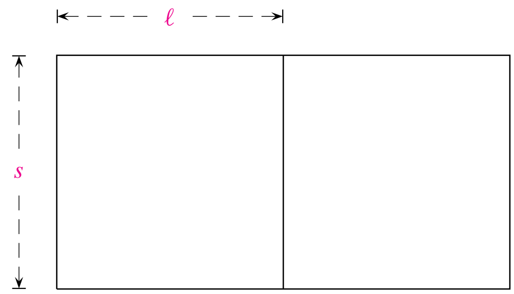
$$y_{max} = \frac{C}{2} - \frac{n+1}{2}\frac{C}{2(n+1)} = \frac{C}{2} - \frac{C}{4} = \frac{C}{4} = \frac{n+1}{2}\frac{C}{2(n+1)} = \frac{n+1}{2}x_{max}.$$

El área total máxima de los n corrales es:

$$A = \frac{C}{2(n+1)}\frac{C}{4} = \frac{C^2}{8(n+1)}.$$

□

10. Un ranchero quiere bardear dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, cada uno de 300 m^2 de área como se muestra en la figura.



¿Cuánto deben medir s & ℓ para que se utilice la mínima cantidad de barda?

▼ La barda que se quiere construir tiene una longitud

$$P = 3s + 4\ell$$

que depende de las variables s & ℓ, las que a su vez están relacionadas por el área $s \times \ell = 300$; de donde

$$\ell = \frac{300}{s}.$$

Al sustituir en P se obtiene

$$P(s) = 3s + 4 \times \frac{300}{s} = 3s + 1\,200s^{-1},$$

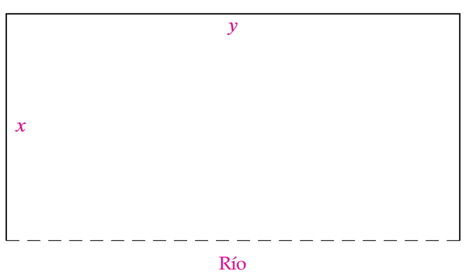
que ahora depende de la única variable s. Además

$$P'(s) = 3 - 1\,200s^{-2} = 0 \Leftrightarrow s^2 = \frac{1\,200}{3} = 400 \Leftrightarrow s = 20 \text{ así como } \ell = \frac{300}{20} = 15.$$

Observación. $P''(s) = 2\,400s^{-3} > 0$ para $s > 0$, luego en $s = 20$ hay un mínimo de $P(s)$. □

11. Un ganadero desea cercar un prado rectangular junto a un río. El prado ha de tener 180 000 m^2 para proporcionar suficiente pasto. ¿Qué dimensiones debe tener el prado para que requiera la menor cantidad de cerca posible, teniendo en cuenta que no hay que cercar en el lado que da al río?

▼ Dibujamos el prado:



El área del prado es:

$$A = xy = 180\,000\,\text{m}^2.$$

El perímetro que queremos minimizar es:

$$P = 2x + y.$$

Despejando y de la expresión del área:

$$y = \frac{180\,000}{x}$$

y sustituyendo en la expresión del perímetro, tenemos una función de una sola variable:

$$P(x) = 2x + \frac{180\,000}{x}.$$

Sus puntos críticos se hallan cuando $P'(x) = 0$, es decir, cuando

$$2 - \frac{180\,000}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{180\,000}{2} = 90\,000 \;\Leftrightarrow\; x \pm 300\,\text{m}.$$

Desechamos $x = -300$

Como

$$P''(x) = 2\frac{180\,000}{x^3} = \frac{360\,000}{x^3},$$

vemos que

$$P''(300) > 0.$$

Luego, para $x = 300$ m & $y = 600$ m tenemos la menor cantidad de cerca posible.

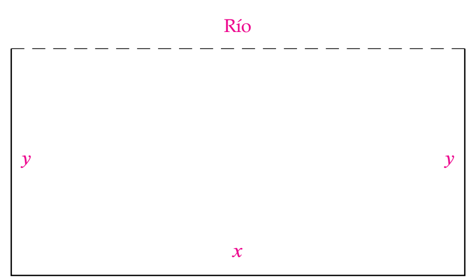
□

12. Un terreno rectangular está delimitado por un río en un lado y por una cerca eléctrica de un solo cable en los otros tres lados.

¿Cuáles son las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima?

¿Cuál es la mayor área que pueda cercarse con un cable de 800 m?

▼ Veamos la figura siguiente



El área del terreno es:

$$A = xy.$$

El perímetro del terreno es:

$$P = x + 2y = 800\text{ m, según los datos proporcionados.}$$

De aquí obtenemos:

$$x = 800 - 2y.$$

Sustituyendo en la fórmula del área se obtiene una función de una variable

$$A(y) = (800 - 2y)y = 800y - 2y^2$$

que es la función cuyo máximo deseamos calcular.

$$A'(y) = 800 - 4y\,;$$
$$A''(y) = -4 < 0\,.$$

La segunda derivada es negativa, por lo que el punto crítico será un máximo

$$A'(y) = 0 \Rightarrow 800 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{800}{4} = 200\,.$$

Para calcular la longitud del otro lado de terreno (la x), sustituimos:

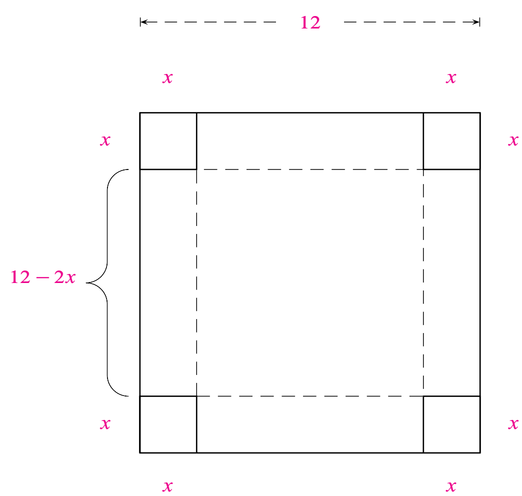
$$x = 800 - 2(200) = 400.$$

Por lo tanto, las dimensiones del terreno que nos dan el área máxima son $x = 400$ & $y = 200$.
La mayor área que se puede cercar con estas condiciones es de $A = 80\,000\ \mathrm{m}^2$.

□

13. Se desea hacer una caja abierta con una pieza cuadrada de material de 12 cm de lado, cortando cuadritos iguales de cada esquina. Hallar el máximo volumen que puede lograrse con una caja así.

▼ Una figura posible es



El volumen, que nos piden es:

$$V(x) = (12 - 2x)^2 x = x(4x^2 - 48x + 144) = 4x^3 - 48x^2 + 144x\,.$$

Sus puntos críticos son:

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow 12(x^2 - 8x + 12) = 0 \Leftrightarrow 12(x-2)(x-6) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ x = 6\,. \end{cases}$$

Podemos desechar $x = 6$, pues físicamente no tiene sentido. Para $x = 2$ cm el volumen es:

$$V(2) = 4(2)^3 - 48(2)^2 + 144(2) = 32 - 192 + 288 = 128 \text{ cm}^3 .$$

Como:

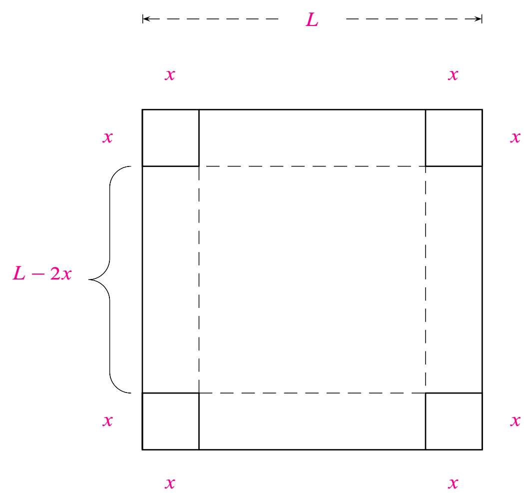
$$V''(x) = 24x - 96 \text{ y } V''(2) = 48 - 96 < 0 ,$$

se trata de un máximo.

□

14. Se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene L metros de lado, recortando un cuadrado en cada una de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener la caja.

▼



Según la figura,

$$V = (L - 2x)^2 x.$$

El dominio de esta función es $D_V = \left[0, \frac{L}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} V' &= (L - 2x)^2 + 2(L - 2x)(-2)x = (L - 2x)^2 - 4x(L - 2x) = (L - 2x)(L - 2x - 4x) = \\ &= (L - 2x)(L - 6x) = L^2 - 8Lx + 12x^2; \\ V'' &= -8L + 24x. \end{aligned}$$

Los puntos críticos son los números que satisfacen

$$V' = 0 \Rightarrow (L - 2x)(L - 6x) = 0.$$

Es decir, $x_1 = \frac{L}{2}$ & $x_2 = \frac{L}{6}$. Desechamos $x_1 = \frac{L}{2}$, pues físicamente no tiene sentido.

Para $x_2 = \frac{L}{6}$

$$V''\left(\frac{L}{6}\right) = -8L + 4L = -4L < 0.$$

Lo cual nos dice que en $\dfrac{L}{6}$ existe un máximo relativo del volumen.

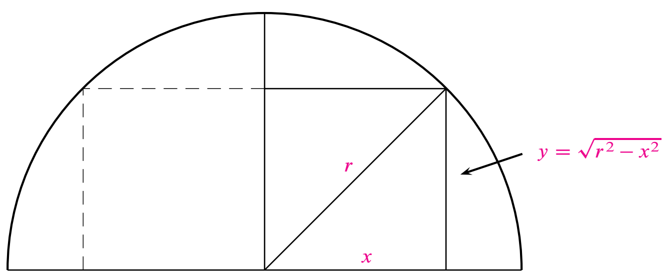
Tenemos que evaluar la función volumen en los extremos de su dominio y en el punto crítico anterior.

$$V(0) = 0, V\left(\frac{L}{2}\right) = 0;$$
$$V\left(\frac{L}{6}\right) = \left(L - 2\frac{L}{6}\right)^2 \frac{L}{6} = \left(L - \frac{L}{3}\right)^2 \frac{L}{6} = \left(\frac{2}{3}L\right)^2 \frac{L}{6} = \frac{4}{9}\frac{1}{6}L^3 = \frac{2}{27}L^3.$$

El valor $\dfrac{L}{6}$ es donde el volumen es máximo. □

15. Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio r.

▼



Se trabaja con la cuarta parte del rectángulo.

Según la figura, la función que deseamos optimizar es el área:

$$A = xy = x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

El dominio de esta función es $D_A = [0, r]$.

Para facilitar las operaciones vamos a trabajar con el cuadrado de esta expresión, el cual tiene los mismos puntos críticos.

Usaremos la notación $\bar{A} = A^2$

Así hallamos que

$$\bar{A} = x^2(r^2 - x^2) = r^2x^2 - x^4;$$
$$\bar{A}' = 2r^2x - 4x^3;$$
$$\bar{A}'' = 2r^2 - 12x^2.$$

Para calcular los puntos críticos:

$$\bar{A}' = 0 \Rightarrow 2r^2x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x(r^2 - 2x^2) = 0.$$

Esto se cumple si $x = 0$ o bien si $r^2 - 2x^2 = 0$, es decir, si $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Desechamos $x = 0$, pues no se tendría un rectángulo.

Evaluando la segunda derivada en el último punto crítico:

$$\bar{A}''\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2r^2 - 12\frac{r^2}{2} = 2r^2 - 6r^2 < 0 \Rightarrow \text{ en } \bar{x} = \frac{r}{\sqrt{2}} \text{ encontramos un máximo.}$$

El valor correspondiente de y es:

$$\bar{y} = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \bar{x}.$$

En los extremos del dominio se ve que la función $\bar{A}$ se anula.

Regresamos a la función A.

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = \frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r^2}{2}.$$

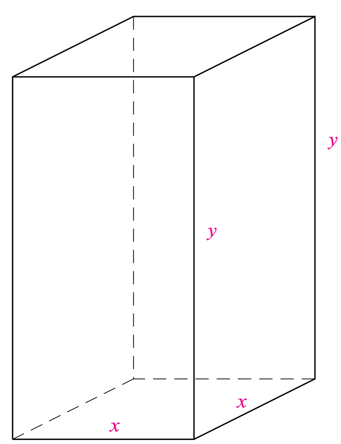
Las dimensiones del rectángulo con área máxima son

$$x_{max} = 2\bar{x} = \frac{2}{\sqrt{2}}r \ \& \ y_{max} = 2\bar{y} = \frac{2}{\sqrt{2}}r.$$

Es decir, es un cuadrado. □

16. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

▼



El volumen de la caja, según la figura es:

$$V = x^2 y.$$

El área de la caja sin tapa es:

$$A = x^2 + 4xy.$$

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen y sustituimos en A:

$$y = \frac{V}{x^2};$$
$$A = x^2 + 4x\left(\frac{V}{x^2}\right) = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Derivando:

$$A' = 2x - \frac{4V}{x^2} = \frac{2x^3 - 4V}{x^2};$$
$$A'' = 2 + \frac{8V}{x^3}.$$

Calculamos puntos críticos:

$$A' = 0 \Rightarrow 2x^3 - 4V = 0 \Rightarrow x^3 = 2V \Rightarrow x_{min} = \sqrt[3]{2V}.$$

Hay un mínimo, ya que

$$A''(\sqrt[3]{2V}) = 2 + 4 = 6 > 0.$$

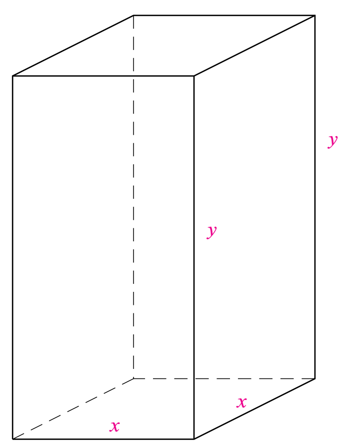
Luego:

$$x_{min} = \sqrt[3]{2V};$$
$$y_{min} = \frac{V}{(2V)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\frac{2V}{(2V)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}(2V)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} = \frac{1}{2}x_{min}.$$

□

17. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de 50 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

▼



El volumen de la caja, según la figura es:

$$50 = x^2y.$$

El área de la caja con tapa es:

$$A = 2x^2 + 4xy.$$

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen y sustituimos en A:

$$y = \frac{50}{x^2};$$
$$A = 2x^2 + 4x\left(\frac{50}{x^2}\right) = 2x^2 + \frac{200}{x}.$$

Derivando:

$$A' = 4x - \frac{200}{x^2} = \frac{4x^3 - 200}{x^2};$$
$$A'' = 4 + \frac{400}{x^3}.$$

Calculamos puntos críticos:

$$A' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 200 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3 = 50 \Rightarrow x = \sqrt[3]{50}.$$

Hay un mínimo, ya que

$$A''(\sqrt[3]{50}) = 4 + 8 = 12 > 0.$$

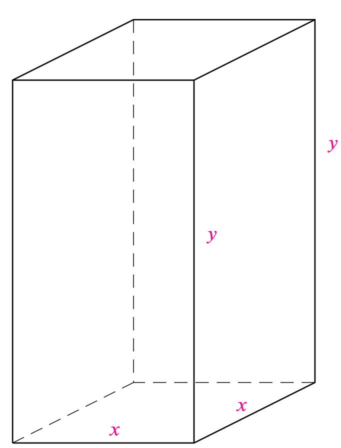
Luego:

$$x_{min} = \sqrt[3]{50};$$
$$y_{min} = \frac{50}{(50)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{50} = x_{min}.$$

□

18. Una caja con base y tapa cuadradas debe tener un volumen de V cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

▼



El volumen V de la caja, según la figura es:

$$V = x^2 y.$$

El área de la caja con tapa es:

$$A = 2x^2 + 4xy.$$

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen y sustituimos en A:

$$y = \frac{V}{x^2};$$
$$A = 2x^2 + 4x\left(\frac{V}{x^2}\right) = 2x^2 + \frac{4V}{x}.$$

Derivando:

$$A' = 4x - \frac{4V}{x^2} = \frac{4x^3 - 4V}{x^2};$$
$$A'' = 4 + \frac{8V}{x^3}.$$

Calculamos puntos críticos:

$$A' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4V = 0 \Rightarrow x^3 = V \Rightarrow x = \sqrt[3]{V}.$$

Hay un mínimo, ya que

$$A''(\sqrt[3]{V}) = 4 + 8 = 12 > 0.$$

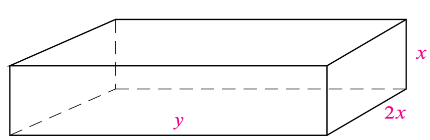
Luego:

$$x_{min} = \sqrt[3]{V};$$
$$y_{min} = \frac{V}{(V)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{V} = x_{min}.$$

□

19. Se quiere construir una cisterna con base rectangular y sin tapa, de manera tal que el ancho de la base sea el doble de la altura de la cisterna. Calcular las dimensiones que debe tener la cisterna para que el volumen sea de 20 m^3 y se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

▼



El volumen de la cisterna es área de la base ($2x \times y$) por la altura (x) y es igual a 20 m^3 (dato que se proporciona).

$$V = (2xy)x = 2x^2 y = 20. \tag{A}$$

El área total (cantidad mínima de material deseada):

$$A = 2x \times y + 2(2x \times x) + 2(x \times y) = 2xy + 4x^2 + 2xy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = 4xy + 4x^2. \tag{B}$$

Despejamos y de (A)

$$y = \frac{10}{x^2}. \tag{C}$$

Sustituyendo en (B) obtenemos:

$$A = 4x\left(\frac{10}{x^2}\right) + 4x^2 = \frac{40}{x} + 4x^2.$$

Derivando esta útima función:

$$A' = -\frac{40}{x^2} + 8x.$$

Calculamos la segunda derivada:

$$A'' = \frac{80}{x^3} + 8 > 0, \text{ pues } x > 0.$$

Tenemos entonces que la gráfica de A es cóncava hacia arriba para $x > 0$, lo cual nos dice que el punto crítico que calculemos será un mínimo absoluto.

Para calcular los puntos críticos igualamos la primera derivada a cero:

$$A' = 0 \Rightarrow -\frac{40}{x^2} + 8x = 0 \Rightarrow \frac{-40 + 8x^3}{x^2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -40 + 8x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{40}{8} = 5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}.$$

Sustituimos en (C) para hallar la dimension del otro lado de la base de la caja:

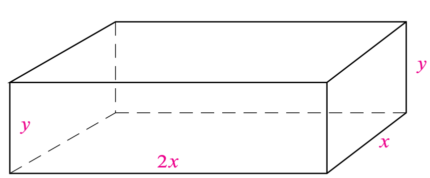
$$y = \frac{10}{(5^{\frac{1}{3}})^2} = 2\frac{5}{5^{\frac{2}{3}}} = 2 \times 5^{\frac{1}{3}} = 2x.$$

Concluimos entonces que las dimensiones de la cisterna con la mínima cantidad de material en su construcción son: base cuadrada de lado $2 \times 5^{\frac{1}{3}}$ y de alto $5^{\frac{1}{3}}$.

□

20. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de V m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta B pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta L pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

▼



El volumen (V) del recipiente, de la figura, es una constante:

$$V = 2x^2 y.$$

El costo total C de los materiales es la función que deseamos optimizar:

$$C = 2x^2B + 2xyL + 4xyL = 2x^2B + 6xyL. \qquad (*)$$

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen

$$y = \frac{V}{2x^2}.$$

Sustituimos en $(*)$; en la función costo para obtener una función con una variable:

$$C = 2x^2B + 6x\left(\frac{V}{2x^2}\right)L = 2x^2B + 3LV\frac{1}{x};$$

$$C' = 4xB - 3LV\frac{1}{x^2} = \frac{4Bx^3 - 3LV}{x^2};$$

$$C'' = 4B + 6LV\frac{1}{x^3}.$$

La segunda derivada es positiva para $x > 0$:

$$C' = 0 \Rightarrow 4Bx^3 - 3LV = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{3LV}{4B} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3LV}{4B}}.$$

Hay un mínimo absoluto para

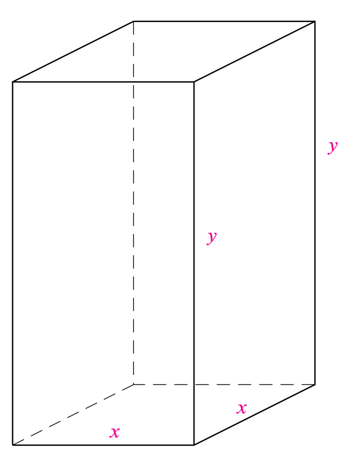
$$x_{min} = \sqrt[3]{\frac{3LV}{4B}};$$

$$y_{min} = \frac{V}{2\left(\frac{3LV}{4B}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}\frac{4B}{3L}\frac{\frac{3LV}{4B}}{\left(\frac{3LV}{4B}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\frac{B}{L}\left(\frac{3LV}{4B}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{B}{L}x_{min}.$$

□

21. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

▼



El total de material usado en la caja sin tapa, según la figura, es:

$$A = x^2 + 4xy = 1\,000.$$

El volumen de la caja es la función que se desea optimizar:

$$V = x^2 y.$$

Despejando y de la restricción, esto es, de la fórmula del área y sustituyendo en V:

$$y = \frac{1\,000 - x^2}{4x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1\,000}{x} - x\right).$$

Sustituyendo en V se obtiene una función de una sola variable:

$$V = \frac{1}{4}x^2\left(\frac{1\,000}{x} - x\right) = \frac{1}{4}(1\,000x - x^3);$$
$$V' = \frac{1}{4}(1\,000 - 3x^2);$$
$$V'' = \frac{1}{4}(-6x) < 0\,, \text{ para } x > 0.$$

Para calcular los puntos críticos, igualamos la primera derivada a cero:

$$V' = 0 \;\Rightarrow\; 1\,000 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 = 1\,000 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{1\,000}{3}}.$$

Hay un máximo absoluto para

$$x_{max} = \sqrt{\frac{1\,000}{3}};$$
$$y_{max} = \frac{1}{4}\left(\frac{1\,000}{\sqrt{\frac{1\,000}{3}}} - \sqrt{\frac{1\,000}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{\frac{1\,000}{3}}{\sqrt{\frac{1\,000}{3}}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1\,000}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{1\,000}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1\,000}{3}}\right) =$$
$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1\,000}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1\,000}{3}} = \frac{1}{2}x_{max}.$$

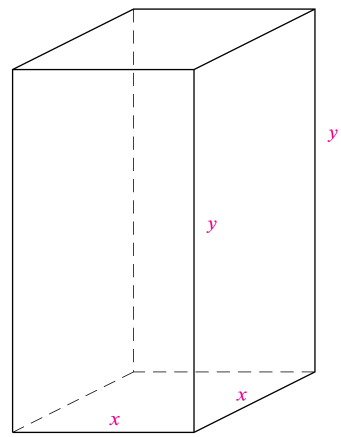
Luego,

$$V_{max} = x^2 y = \frac{1\,000}{3}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1\,000}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1\,000}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

□

22. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

▼



El total de material usado en la caja sin tapa, según la figura, es:

$$A = x^2 + 4xy = M.$$

El volumen de la caja, la función que se desea optimizar, es:

$$V = x^2 y.$$

Despejando y de la restricción, esto es, de la fórmula del área y sustituyendo en V:

$$y = \frac{M - x^2}{4x} = \frac{1}{4}\left(\frac{M}{x} - x\right);$$
$$V = \frac{1}{4}x^2\left(\frac{M}{x} - x\right) = \frac{1}{4}\left(Mx - x^3\right).$$

El volumen se encuentra ahora con una sola variable.

$$V' = \frac{1}{4}(M - 3x^2);$$
$$V'' = \frac{1}{4}(-6x) < 0, \text{ para } x > 0.$$

Para calcular los puntos críticos, igualamos la primera derivada a cero:

$$V' = 0 \Rightarrow M - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = M \Rightarrow x = \sqrt{\frac{M}{3}}.$$

Hay un máximo para

$$x_{max} = \sqrt{\frac{M}{3}};$$

$$y_{max} = \frac{1}{4}\left(\frac{M}{\sqrt{\frac{M}{3}}} - \sqrt{\frac{M}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{\frac{M}{3}}{\sqrt{\frac{M}{3}}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{3}}\right) = \frac{3}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{3}}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{M}{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{3}} = \frac{1}{2}x_{max}.$$

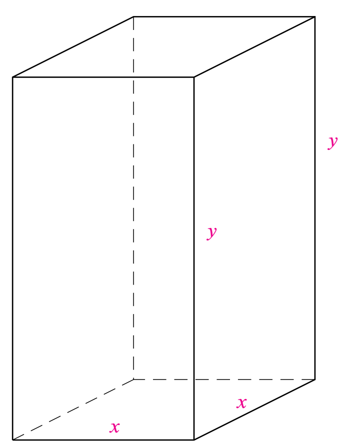
Además,

$$V_{max} = \frac{M}{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{3}} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

□

23. Si se cuenta con 1 000 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

▼



El total de material usado en la caja con tapa, según la figura, es:

$$A = 2x^2 + 4xy = 1\,000.$$

El volumen de la caja, la función que se desea optimizar, es:

$$V = x^2 y.$$

Despejando y de la restricción, esto es, de la fórmula del área y sustituyendo en V:

$$y = \frac{1\,000 - 2x^2}{4x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1\,000}{x} - 2x\right);$$

$$V = \frac{1}{4}x^2\left(\frac{1\,000}{x} - 2x\right) = \frac{1}{4}\left(1\,000x - 2x^3\right).$$

El volumen se encuentra ahora con una sola variable:

$$V' = \frac{1}{4}(1\,000 - 6x^2);$$
$$V'' = \frac{1}{4}(-12x) < 0, \text{ para } x > 0.$$

Para calcular los puntos críticos, igualamos la primera derivada a cero:

$$V' = 0 \;\Rightarrow\; 1\,000 - 6x^2 = 0 \;\Rightarrow\; 6x^2 = 1\,000 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{1\,000}{6}} = \sqrt{\frac{500}{3}}.$$

Hay un máximo para

$$x_{max} = \sqrt{\frac{500}{3}};$$
$$y_{max} = \frac{1}{4}\left(\frac{1\,000}{\sqrt{\frac{500}{3}}} - 2\sqrt{\frac{500}{3}}\right) = \frac{6}{4}\left(\frac{\frac{1\,000}{6}}{\sqrt{\frac{500}{3}}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{500}{3}}\right) = \frac{6}{4}\left(\sqrt{\frac{500}{3}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{500}{3}}\right) =$$
$$= \frac{6}{4} \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{500}{3}} = \sqrt{\frac{500}{3}} = x_{max}.$$

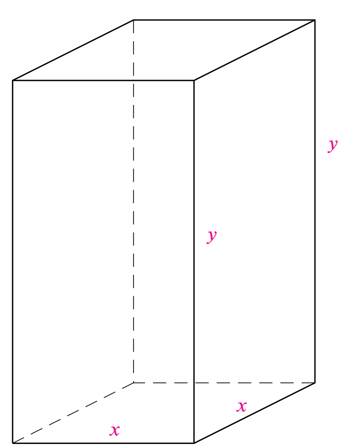
Luego:

$$V_{max} = x^2 y = \frac{500}{3}\sqrt{\frac{500}{3}}.$$

□

24. Si se cuenta con M cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

▼



El total de material usado en la caja con tapa, según la figura, es:

$$A = 2x^2 + 4xy = M.$$

El volumen de la caja, la función que se desea optimizar, es:

$$V = x^2 y.$$

Despejando y de la restricción, esto es, de la fórmula del área y sustituyendo en V:

$$y = \frac{M - 2x^2}{4x} = \frac{1}{4}\left(\frac{M}{x} - 2x\right);$$
$$V = \frac{1}{4}x^2\left(\frac{M}{x} - 2x\right) = \frac{1}{4}\left(Mx - 2x^3\right).$$

El volumen se encuentra ahora con una sola variable

$$V' = \frac{1}{4}(M - 6x^2);$$
$$V'' = \frac{1}{4}(-12x) < 0 \text{ , para } x > 0.$$

Para calcular los puntos críticos, igualamos la primera derivada a cero:

$$V' = 0 \Rightarrow M - 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 = M \Rightarrow x = \sqrt{\frac{M}{6}}.$$

Hay un máximo para

$$x_{max} = \sqrt{\frac{M}{6}};$$
$$y_{max} = \frac{1}{4}\left(\frac{M}{\sqrt{\frac{M}{6}}} - 2\sqrt{\frac{M}{6}}\right) = \frac{6}{4}\left(\frac{\frac{M}{6}}{\sqrt{\frac{M}{6}}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{6}}\right) = \frac{6}{4}\left(\sqrt{\frac{M}{6}} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{M}{6}}\right) =$$
$$= \frac{6}{4} \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{M}{6}} = \sqrt{\frac{M}{6}} = x_{max}.$$

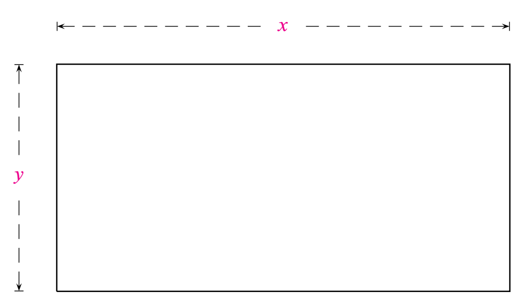
Luego:

$$V_{max} = \frac{M}{6}\sqrt{\frac{M}{6}}.$$

□

25. Demuestre que, de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el menor perímetro es un cuadrado.

▼



De la figura se tiene que el área A constante es:

$$A = xy.$$

El perímetro es la función que deseamos optimizar:

$$P = 2x + 2y. \qquad (*)$$

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del área:

$$y = \frac{A}{x}.$$

Sustituimos en $(*)$ que ahora queda con una sola variable:

$$P = 2x + 2\frac{A}{x}.$$

Derivando, obtenemos:

$$P' = 2 - 2A\frac{1}{x^2} = 2\left(\frac{x^2 - A}{x^2}\right);$$

$$P'' = 2A\frac{2}{x^3}.$$

Observe que la segunda derivada siempre es positiva, para $x > 0$.

$$P' = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - A = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{A}.$$

Hay un mínimo para

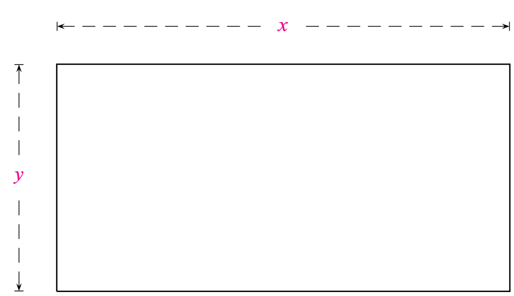
$$x_{min} = \sqrt{A};$$

$$y_{min} = \frac{A}{A^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{A} = x_{min}.$$

□

26. Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado el que tiene el área máxima es un cuadrado.

▼



De la figura dada se tiene que el perímetro P constante es:

$$P = 2x + 2y.$$

El área es la función que deseamos optimizar:

$$A = xy. \tag{*}$$

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del perímetro:

$$y = \frac{P - 2x}{2}.$$

Sustituimos en $(*)$ que ahora queda con una sola variable:

$$A = x\left(\frac{P-2x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(Px - 2x^2\right).$$

Derivando, obtenemos:

$$A' = \frac{1}{2}(P - 4x);$$
$$A'' = \frac{1}{2}(-4) = -2 < 0.$$

Observación. La segunda derivada siempre es negativa.

$$A' = 0 \Rightarrow P - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{4}.$$

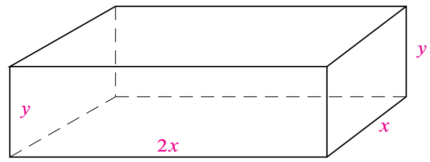
Hay máximo para

$$x_{max} = \frac{P}{4};$$
$$y_{max} = \frac{P - \frac{P}{2}}{2} = \frac{\frac{P}{2}}{2} = \frac{P}{4} = x_{max}.$$

□

27. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 3 pesos el metro cuadrado. El material para los costados cuesta 2 pesos el metro cuadrado. Encuentre las dimensiones para tener el más barato de esos recipientes.

▼



De la figura, el volumen del recipiente es:

$$V = 10 = 2x^2y.$$

Considerando que se trata de una caja sin tapa, el costo de los materiales C es:

$$C = 6x^2 + 4xy + 8xy = 6x^2 + 12xy, \text{ ésta es la función que deseamos optimizar.}$$

Despejamos y de la restricción dada, esto es, de la fórmula del volumen:

$$y = \frac{10}{2x^2} = \frac{5}{x^2}.$$

Sustituimos en C (la función costo que ahora queda con una sola variable:)

$$C = 6x^2 + 12x\left(\frac{5}{x^2}\right) = 6x^2 + 60\frac{1}{x}.$$

Derivando, se obtiene:

$$C' = 12x - 60\frac{1}{x^2} = \frac{12x^3 - 60}{x^2};$$
$$C'' = 12 + 120\frac{1}{x^3} > 0.$$

Observación. La segunda derivada siempre es positiva para $x > 0$.

$$C' = 0 \Rightarrow 12x^3 - 60 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{60}{12} \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}.$$

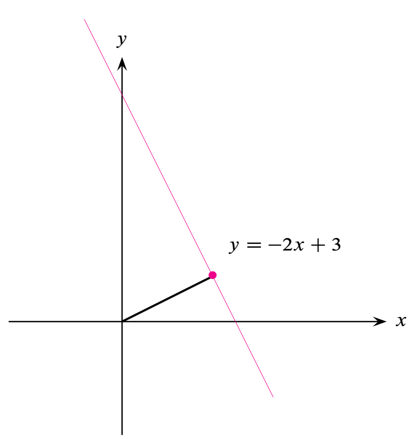
Hay un mínimo para

$$x_{min} = \sqrt[3]{5};$$
$$y_{min} = \frac{5}{(5)^{\frac{2}{3}}} = \frac{5}{(5)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{5} = x_{min}.$$

□

28. Halle el punto de la recta $y = -2x + 3$ más cercano al origen.

▼



Un punto arbitrario sobre la recta tiene las coordenadas $(x, y) = (x, -2x + 3)$.
La distancia de un punto arbitrario de la recta al origen es:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-2x + 3)^2}.$$

Vamos a trabajar con el cuadrado de la función anterior pues tiene los mismos puntos críticos.

Usaremos la notación

$$D = d^2;$$
$$D = x^2 + (-2x + 3)^2;$$
$$D' = 2x + 2(-2x + 3)(-2) = 10x - 12;$$
$$D'' = 10 > 0.$$

La segunda derivada siempre es positiva

$$D' = 0 \Rightarrow 10x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}.$$

Hay un mínimo para

$$x_{min} = \frac{6}{5};$$
$$y_{min} = -2\left(\frac{6}{5}\right) + 3 = \frac{-12}{5} + 3 = \frac{3}{5}.$$

Así, observamos que:

$$x_{min} = 2y_{min}.$$

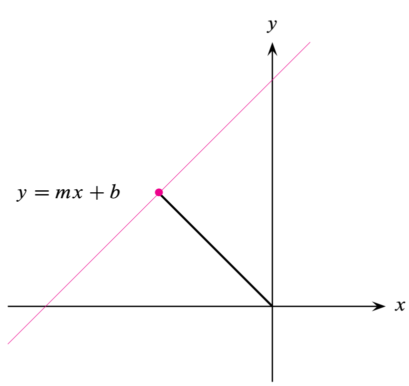
El punto sobre la recta más cercano al origen es:

$$(x_{min}, y_{min}) = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

□

29. Halle el punto de la recta $y = mx + b$ más cercano al origen.

▼



Un punto arbitrario sobre la recta tiene las coordenadas $(x, mx + b)$.
Distancia de un punto de la recta al origen.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (mx + b)^2}.$$

Vamos a trabajar con el cuadrado de la función anterior, pues tiene los mismos puntos críticos.

Usaremos la notación

$$D = d^2;$$
$$D = x^2 + (mx + b)^2.$$

Derivando, se obtiene:

$$D' = 2x + 2(mx + b)m;$$
$$D'' = 2 + 2m^2 > 0.$$

La segunda derivada siempre es positiva

$$D'' = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2(m^2x + bm) = 0 \;\Rightarrow\; x + m^2x + bm = 0 \;\Rightarrow\; x(1 + m^2) = -bm \;\Rightarrow\; x = -\frac{bm}{1 + m^2}.$$

Hay un mínimo para

$$x_{min} = -\frac{bm}{1 + m^2};$$
$$y_{min} = m\left(-\frac{bm}{1 + m^2}\right) + b = \frac{-bm^2}{1 + m^2} + b = \frac{-bm^2 + b + bm^2}{1 + m^2} = \frac{b}{1 + m^2}.$$

Así, observamos que:

$$x_{min} = -my_{min}.$$

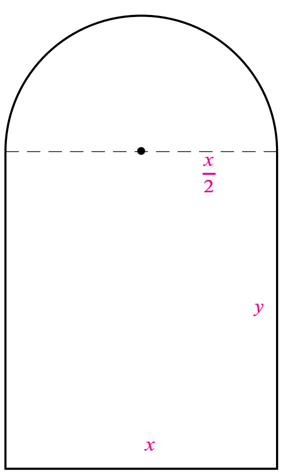
El punto más cercanoal origen sobre la recta es :

$$(x_{min}, y_{min}) = \left(-\frac{bm}{1 + m^2}, \frac{b}{1 + m^2}\right).$$

□

30. Una ventana normanda tiene forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de P m, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.

▼



Considerando la figura, el perímetro P de la ventana que es constante debe ser:

$$P = x + 2y + \frac{\pi x}{2} = x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + 2y = x\left(\frac{2 + \pi}{2}\right) + 2y.$$

El área de la ventana A, la función que deseamos optimizar es:

$$A = xy + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \frac{\pi}{8}x^2.$$

Despejamos y de la restricción, esto es, de P:

$$y = \frac{1}{2}\left(P - \frac{2+\pi}{2}x\right) = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{4}x.$$

Sustituimos en A y queda en función de una sola variable:

$$A = x\left(\frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = \frac{P}{2}x - \frac{2+\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2 =$$
$$= \frac{P}{2}x + \frac{-4-2\pi+\pi}{8}x^2 = \frac{P}{2}x - \frac{4+\pi}{8}x^2.$$

Derivando, se obtiene:

$$A' = \frac{P}{2} - \frac{4+\pi}{4}x;$$
$$A'' = -\frac{4+\pi}{4} < 0.$$

La segunda derivada siempre es negativa.

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{P}{2} - \frac{4+\pi}{4}x = 0 \Rightarrow x = \frac{\frac{P}{2}}{\frac{4+\pi}{4}} = \frac{2P}{4+\pi}.$$

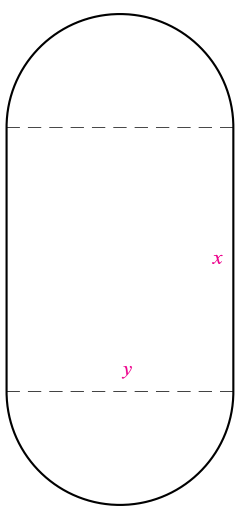
Hay un máximo para

$$x_{max} = \frac{2P}{4+\pi};$$
$$y_{max} = \frac{P}{2} - \frac{2+\pi}{4}\frac{2P}{4+\pi} = \frac{1}{2}\left(P - \frac{2+\pi}{4+\pi}P\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2P}{4+\pi}\right) = \frac{1}{2}x_{max}.$$

□

31. Una pista de entrenamiento consta de dos semicírculos adosados en los lados opuestos de un rectángulo. Si su perímetro es de P m, hallar las dimensiones que hacen máxima el área de la región rectangular.

▼



Considerando la figura, el perímetro constante P es:

$$P = 2x + \pi y.$$

La función que se desea optimizar es el área A del rectángulo:

$$A = xy.$$

Despejamos x de la restricción, esto es, de P:

$$x = \frac{1}{2}(P - \pi y).$$

Sustituyendo en el área A se obtiene una función de una sola variable:

$$A = \frac{1}{2}(P - \pi y)y = \frac{1}{2}Py - \frac{1}{2}\pi y^2.$$

Derivando, se obtiene:

$$A' = \frac{1}{2}P - \pi y;$$
$$A'' = -\pi < 0.$$

La segunda derivada es siempre es negativa.

Puntos críticos:

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}P - \pi y = 0 \Rightarrow y = \frac{P}{2\pi}.$$

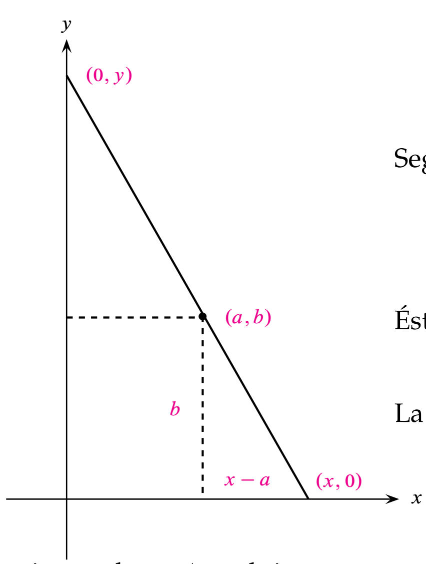
Hay un máximo para

$$y_{max} = \frac{P}{2\pi};$$
$$x_{max} = \frac{1}{2}\left(P - \pi\frac{P}{2\pi}\right) = \frac{P}{4} = \frac{\pi}{2}\frac{P}{2\pi} = \frac{\pi}{2}y_{max}.$$

□

32. Un triágulo rectángulo está formado por los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (a, b). Hallar los vértices de modo que su área sea mínima.

▼



Según la figura, el área del triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}xy.$$

Ésta es la función que deseamos minimizar.

La relación que guardan las variables es:

$$\frac{b}{x-a} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{x-a}b.$$

Sustituyendo en A se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}x\left(\frac{x}{x-a}\right)b = \frac{1}{2}b\frac{x^2}{x-a}.$$

Derivando, se obtiene:

$$A' = \frac{1}{2}b\frac{(x-a)2x - x^2}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}b\frac{2x^2 - 2ax - x^2}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}b\frac{x^2 - 2ax}{(x-a)^2};$$

$$A'' = \frac{1}{2}b\frac{(x-a)^2(2x-2a) - (x^2-2ax)2(x-a)}{(x-a)^4} = \frac{1}{2}b\frac{(x-a)(2x-2a) - 2(x^2-2ax)}{(x-a)^3} =$$

$$= b\frac{x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2ax}{(x-a)^3} = b\frac{a^2}{(x-a)^3};$$

$$A' = 0 \Rightarrow x^2 - 2ax = 0 \Rightarrow x(x-2a) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o bien } x_{min} = 2a.$$

Considerando que con $x = 0$ no se tiene un triángulo, evaluamos la segunda derivada en $x = 2a$.

$$A''(2a) = b\frac{a^2}{a^3} = \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \text{ hay un mínimo.}$$

El área A es mínima para

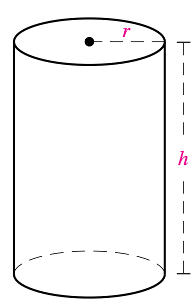
$$x_{min} = 2a \;\&\; y_{min} = \frac{2a}{2a-a}b = 2b.$$

□

33. Se quiere construir un recipiente cilíndrico de base circular con tapa y una capacidad para 600 ℓ. Calcular las dimensiones que debe tener para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

(Considerar que 1 ℓ = 1 dm^3.)

▼ Usamos la figura



El área total que deseamos que sea mínima es el área lateral $2\pi rh$ más el área de las dos bases $2\pi r^2$:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2,$$

donde r & h están en decímetros, pero como $V = 600$ dm^3 y como $V = \pi r^2 h$, tenemos

$$600 = \pi r^2 h;$$

luego, despejando h

$$h = \frac{600}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo por este valor en A, la podemos expresar como función de una única variable r:

$$A(r) = 2\pi r\frac{600}{\pi r^2} + 2\pi r^2.$$

Simplificando,

$$A(r) = \frac{1\,200}{r} + 2\pi r^2 = 1\,200r^{-1} + 2\pi r^2.$$

Busquemos el valor de r que hace que A sea mínima.

Derivando $A(r)$

$$\frac{dA(r)}{dr} = \frac{-1\,200}{r^2} + 4\pi r.$$

Igualando a cero:

$$\frac{-1\,200}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{1\,200}{r^2} \Rightarrow r^3 = \frac{1\,200}{4\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{300}{\pi}}.$$

Sustituyendo este valor de r en $h = \dfrac{600}{\pi r^2}$, se obtiene:

$$h = \frac{600}{\pi\left(\dfrac{300}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow h = \frac{(2)(300)}{\pi\dfrac{300^{2/3}}{\pi^{2/3}}} \Rightarrow h = \frac{(2)(300)^{1/3}}{\pi^{1/3}} \Rightarrow h = 2\sqrt[3]{\frac{300}{\pi}} \Rightarrow h = 2r,$$

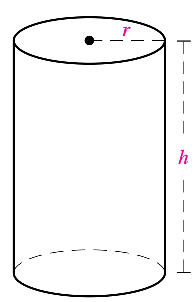
a partir de $\dfrac{dA(r)}{dr} = \dfrac{-1\,200}{r^2} + 4\pi r = -1\,200r^{-2} + 4\pi r$, calculamos la segunda derivada:

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2} = \frac{2\,400}{r^3} + 4\pi,$$

la cual es positiva para $r > 0$, por lo que para $r = \sqrt{\dfrac{300}{\pi}}$ & $h = 2r$, tenemos efectivamente un área mínima. □

34. Un cilindro circular recto ha de contener V cm^3 de refresco y usar la mínima cantidad posible de material para su construcción. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?

▼



De la figura, se tiene que el volumen V del cilindro es:

$$V = \pi r^2 h.$$

El área total del cilindro, que es la función que se desea optimizar, es:

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Despejamos h de la restricción (esto es, de V) y sustituimos en A:

$$h = \frac{V}{\pi r^2};$$
$$A = 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Al sustituir nos queda una función de una sola variable a la cual derivamos:

$$A' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r;$$
$$A'' = \frac{4V}{r^3} + 4\pi > 0, \text{ ya que } r > 0.$$
$$A' = 0 \Rightarrow -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow \frac{-2V + 4\pi r^3}{r^2} = 0 \Rightarrow -2V + 4\pi r^3 = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

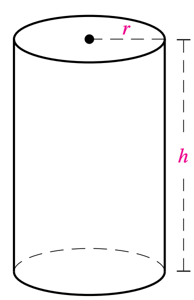
Hay un mínimo para

$$r_{min} = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}};$$
$$h_{min} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\frac{\frac{V}{2\pi}}{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2r.$$

□

35. Determine el volumen máximo posible de un cilindro circular recto si el área total de su superficie, incluyendo las dos bases circulares, es de 150π m^2.

▼ Usamos la figura



Sea r el radio de la base del cilindro y h su altura, luego:

$$V = \pi r^2 h \;\&\; A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 150\pi.$$

Despejando h de la restricción dada por el área A

$$h = \frac{150\pi - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{75 - r^2}{r}.$$

Si sustituimos este valor en la fórmula del volumen V, lo tendremos expresado como función de una variable:

$$V(r) = \frac{\pi r^2(75 - r^2)}{r} = 75\pi r - \pi r^3;$$

y de aquí

$$V'(r) = 75\pi - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 25 \Leftrightarrow r = 5;$$

y también:

$$h = \frac{75-25}{5} = \frac{50}{5} = 10 \text{ y } V = \pi \times 25 \times 10 = 250\pi \text{ m}^3$$

Notamos que

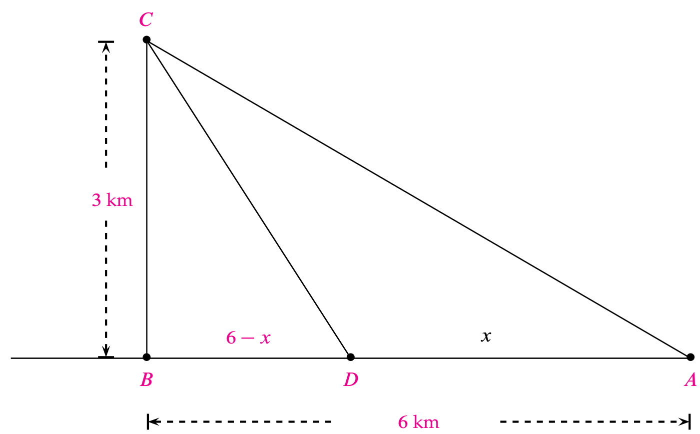
$$V''(r) = -6\pi r < 0, \text{ para } r > 0,$$

por lo que para el valor de $r = 5$ m se tiene un volumen máximo.

□

36. Dos puntos A, B se encuentran en la orilla de una playa recta, separados 6 km entre sí. Un punto C esta frente a B a 3 km en el mar. Cuesta \$400.00 tender 1 km de tubería en la playa y \$500.00 en el mar. Determine la forma más económica de trazar la tubería desde A hasta C. (No necesariamente debe pasar por B.)

▼ Hagamos un croquis



Pensemos que vamos a llevar la tubería desde A hasta D, un punto sobre la playa a x km de A, y de ahí a C por el mar; la distancia CD, como hipotenusa de un triángulo rectángulo con vértice en B es:

$$CD = \sqrt{(6-x)^2 + 3^2} = (x^2 - 12x + 36 + 9)^{\frac{1}{2}} = (x^2 - 12x + 45)^{\frac{1}{2}}.$$

Queremos pues minimizar la función costo

$$C(x) = 400x + 500(x^2 - 12x + 45)^{\frac{1}{2}}.$$

Derivamos

$$C'(x) = 400 + \frac{250(2x-12)}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}} = \frac{400\sqrt{x^2 - 12x + 45} + 500(x-6)}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}}.$$

Puntos críticos:

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 400\sqrt{x^2-12x+45} + 500(x-6) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 400\sqrt{x^2-12x+45} = 500(6-x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2-12x+45} = \frac{5}{4}(6-x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-12x+45 = \frac{25}{16}(36-12x+x^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{25}{16}-1\right)x^2 - 12x\left(\frac{25}{16}-1\right) + \frac{25\times 36}{16} - 45 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9}{16}x^2 - 12\left(\frac{9}{16}\right)x + \frac{225}{4} - 45 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9}{16}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{225-180}{4} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2 - 108x + 180 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = \begin{cases} 10; \\ 2; \end{cases}$$

entonces $x = 2$ y desechamos $x = 10$, por ser ilógico.

Por otro lado, $C(x)$ es derivable en toda la recta, ya que $x^2 - 12x + 45$ no tiene raíces reales, pues $b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 45 < 0$. De hecho $x^2 - 12x + 45 > 0$. Por ejemplo, en $x = 0$ la función continua $x^2 - 12x + 45$ vale 45.

Calculemos la segunda derivada de $C(x)$, derivando de

$$C'(x) = 400 + \frac{500(x-6)}{\sqrt{x^2-12x+45}};$$
$$C''(x) = \frac{500\sqrt{x^2-12x+45} - \dfrac{500(x-6)(2x-12)}{2\sqrt{x^2-12x+45}}}{(\sqrt{x^2-12x+45})^2} =$$
$$= \frac{500[(x^2-12x+45)-(x-6)^2]}{(x^2-12x+45)^{\frac{3}{2}}} = \frac{500(x^2-12x+45-x^2+12x-36)}{(x^2-12x+45)^{\frac{3}{2}}} =$$
$$= \frac{500\times 9}{(x^2-12x+45)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Luego, efectivamente para $x = 2$ hay un mínimo.

En este caso el costo es

$$C(2) = 800 + 500\sqrt{4-24+45} = 800 + 500 \times 5 = 800 + 2\,500 = 3\,300 \text{ pesos.}$$

Si se hubiera tendido la tubería por el mar, desde A hasta C, el costo hubiese sido:

$$C(0) = 500\sqrt{45} \approx 500 \times 6.7082039 = 3354.102 > C(2).$$

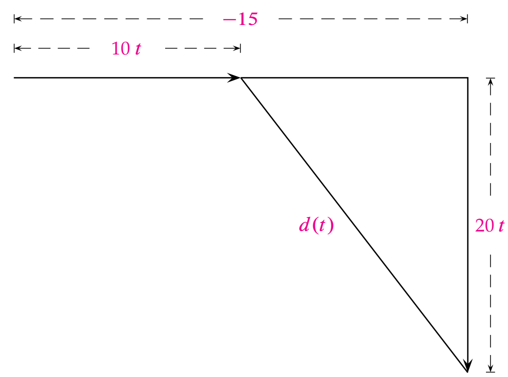
Y si se hubiese tendido desde A hasta B por la playa y desde B hasta C por el mar, ambos en línea recta, el costo hubiese sido:

$$C(6) = 400 \times 6 + 500\sqrt{36-72+45} = 2\,400 + 500 \times \sqrt{9} =$$
$$= 2\,400 + 1\,500 = 3\,900 \text{ pesos } > C(2) \text{ también.}$$

□

37. Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más próximos estos dos navíos?

▼ Usamos la siguiente figura, donde el tiempo t está en horas:



La distancia entre ambos barcos es

$$d(t) = \sqrt{(-15+10t)^2 + (-20t)^2} = \sqrt{500t^2 - 300t + 225}\,,$$

de la cual queremos hallar su mínimo, por lo que buscamos sus puntos críticos

$$d\,'(t) = \frac{1\,000t - 300}{2\sqrt{500t^2 - 300t + 225}} = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{3}{10}h$$

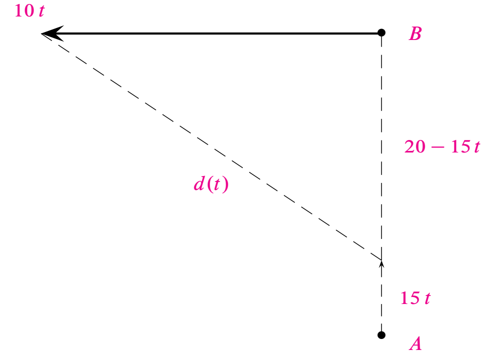
en donde $d(t)$ pasa de ser decreciente a ser creciente; entonces el mínimo es:

$$d\left(\frac{3}{10}\right) = \sqrt{144+36} = \sqrt{180} \approx 13.416408 \text{ km.}$$

□

38. A las 13:00 horas un barco A se encuentra 20 millas al sur del barco B y viaja hacia el norte a 15 millas/h. El barco B navega hacia el oeste a 10 millas/h. ¿A qué hora se alcanza la distancia mínima entre las dos embarcaciones?

▼ Usamos la figura siguiente, donde t son las horas transcurridas a partir de las 13:00 horas:



El espacio que recorre el barco A es $15t$ millas y el recorrido por el barco B es $10t$, por lo que la distancia entre ambos barcos, cuyo mínimo es el que buscamos, según el teorema de Pitágoras es:

$$\begin{aligned} d(t) &= \sqrt{(10t)^2 + (20 - 15t)^2} = \\ &= \sqrt{100t^2 + 400 - 600t + 225t^2} = \\ &= \sqrt{325t^2 - 600t + 400}\,. \end{aligned}$$

El mínimo de esta función coincide con el mínimo de la función

$$[d(t)]^2 = 325t^2 - 600t + 400 = 25(13t^2 - 24t + 16)\,.$$

Por lo que basta con que encontremos el mínimo de la función $g(t) = 13t^2 - 24t + 16$, que por otra parte es el vértice de la parábola $y = g(t)$:

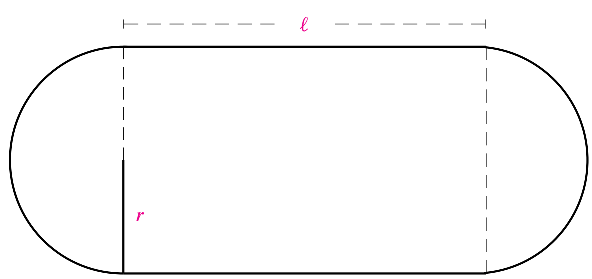
$$g'(t) = 26t - 24 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}\,.$$

Y como $g''(t) = 26 > 0$, se trata de un mínimo y la mínima distancia se alcanza a las $13 + \dfrac{12}{13}$ horas.

□

39. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen de $10\,\ell$ en forma de un cilindro circular recto rematado por dos hemisferios (medias esferas). Tomando en cuenta que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que la superficie es $4\pi r^2$, encontrar las dimensiones del tanque que minimicen la cantidad de metal.

▼ Usamos la figura siguiente que es la de una sección vertical del tanque:



Considerando un cilindro circular recto de radio r y largo ℓ, medidos ambos en decímetros (dm), el volumen de este tanque es

$$V = \pi r^2 \ell + \frac{4}{3}\pi r^3;$$

y debe ser $V = 10\,\ell = 10$ dm^3; por lo cual se debe cumplir que

$$\pi r^2 \ell + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10.$$

Minimizar la cantidad de metal es equivalente a minimizar el área de la superficie del tanque.

El área del tanque es:

$$A = 2\pi r \ell + 4\pi r^2.$$

Se tiene entonces:

Una ecuación, $\pi r^2 \ell + \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 10$.

Una función, $A = 2\pi r \ell + 4\pi r^2$.

De la ecuación se despeja una de las variables (la que convenga) para luego sustituirla en la función. Conviene despejar ℓ:

$$\pi r^2 \ell + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10 \Rightarrow \ell = \frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2}.$$

Sustituyendo en A se obtiene:

$$A = 2\pi r \ell + 4\pi r^2 = 2\pi r \left(\frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} \right) + 4\pi r^2 =$$
$$= \frac{2}{r}\left(10 - \frac{4}{3}\pi r^3\right) + 4\pi r^2 = \frac{20}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 + 4\pi r^2;$$
$$A(r) = \frac{20}{r} + \frac{4}{3}\pi r^2,$$

que es la función a minimizar:

$$A'(r) = -\frac{20}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r;$$
$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow -\frac{20}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}\pi r = \frac{20}{r^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^3 = \frac{60}{8\pi} = \frac{15}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}} \approx 1.3365.$$

Entonces la función $A(r)$ tiene un punto crítico en $r_1 \approx 1.3365$:

$$A''(r) = \frac{40}{r^3} + \frac{8}{3}\pi > 0.$$

Se tiene un mínimo local estricto.

Por lo tanto, las dimensiones del tanque que minimizan el área son:

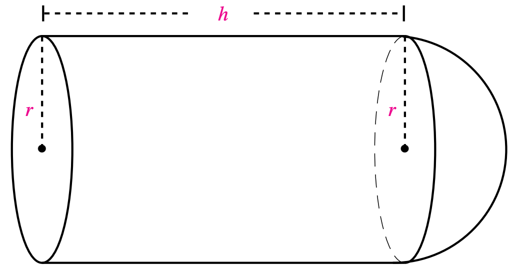
$$r = 1.3365;$$
$$\ell = \frac{10 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{10 - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{15}{2\pi}\right)}{\pi (1.3365)^2} = \frac{10 - 10}{\pi (1.3365)^2} = 0.$$

Es decir, el tanque debe ser una esfera de radio $r_1 = 1.3365$ dm.

□

40. Una lata de aceite tiene la forma de un cilindro con fondo plano en la base y una semiesfera en la parte superior. Si esta lata debe contener un volumen de 1 000 pulgadas cúbicas y se desprecia el espesor del material, determine las dimensiones que minimizan la cantidad de material necesario para fabricarla.

▼ Usamos la figura siguiente:



El volumen total consta de dos partes: el volumen del cilindro más el volumen de la semiesfera:

$$V = \pi r^2 h + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 1\,000. \tag{A}$$

El material usado coincide con el área total de la superfice exterior que consta del área de la base, más el área lateral del cilindro y el área de la semiesfera:

$$M = \pi r^2 + 2\pi r h + \frac{1}{2} \times 4\pi r^2. \tag{B}$$

Ésta es la función que deseamos minimizar y consta de dos variables.
De la relación (A) despejamos h:

$$\pi r^2 h = 1\,000 - \frac{2}{3}\pi r^3 \;\Rightarrow\; h = \frac{1\,000}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r\,. \tag{C}$$

Sustituimos este valor en (B) y obtenemos:

$$M(r) = \pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1\,000}{\pi r^2} - \frac{2}{3} r \right) + 2\pi r^2 = $$
$$= 3\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{2\,000}{r}\,.$$

Calculamos primera y segunda derivada:

$$M'(r) = \frac{5}{3}\pi 2r - \frac{2\,000}{r^2} = \frac{10\pi r^3 - 6\,000}{3r^2};$$
$$M''(r) = \frac{10}{3}\pi + 4\,000\frac{1}{r^3} > 0, \quad \text{para } x > 0.$$

Calculamos puntos críticos igualando a cero la primera derivada:

$$M'(r) = 0 \;\Rightarrow\; 10\pi r^3 - 6\,000 = 0 \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{600}{\pi} \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{600}{\pi}} = \left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 5.75882\,.$$

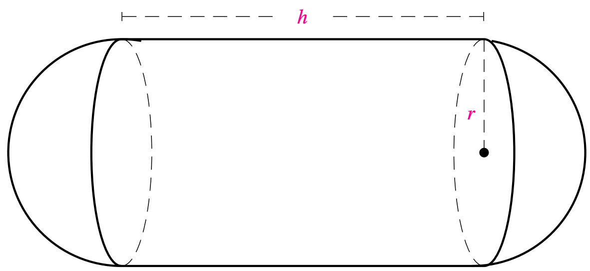
Sustituyendo este valor en (C):

$$h = \frac{1\,000}{\pi \left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1\,000}{600} \times \frac{600}{\pi \left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \frac{5}{3}\frac{\left(\frac{600}{\pi}\right)}{\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{600}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = r.$$

Como $M''(r) > 0$, entonces hay un mínimo para $M(r)$, es decir, hallamos que la lata con las condiciones dadas debe tener la altura del cilindro igual que el radio de la base.

□

41. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de 10π pies^3?



▼ El volumen del tanque es el volumen del cilindro, más el volumen de la esfera:

$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10\pi. \tag{A}$$

El área total del tanque es el área lateral del cilindro, más el área de la esfera:

$$A = 2\pi r h + 4\pi r^2.$$

Si α por pie^2 es el costo del material de la parte cilíndrica, se tiene que el costo total es:

$$C = 2\pi r h \times \alpha + 4\pi r^2(2\alpha) \Rightarrow C = 2\alpha\pi(rh + 4r^2). \tag{B}$$

Ésta es la función que deseamos minimizar. Tiene dos variables r, h. Usamos (A) para encontrar una relación entre estas variables.

$$r^2 h + \frac{4}{3}r^3 = 10 \Rightarrow r^2 h = 10 - \frac{4}{3}r^3 \Rightarrow h = \frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r. \tag{C}$$

Sustituimos este valor en (B):

$$C = 2\alpha\pi\left[r\left(\frac{10}{r^2} - \frac{4}{3}r\right) + 4r^2\right] = 2\alpha\pi\left(10\frac{1}{r} - \frac{4}{3}r^2 + 4r^2\right) = 2\alpha\pi\left(10\frac{1}{r} + \frac{8}{3}r^2\right).$$

Calculamos la primera y segunda derivadas

$$C' = 2\alpha\pi\left(-10\frac{1}{r^2} + \frac{16}{3}r\right) = 2\alpha\pi\left(\frac{-30 + 16r^3}{3r^2}\right);$$
$$C'' = 2\alpha\pi\left(10\frac{2}{r^3} + \frac{16}{3}\right) > 0.$$

Calculamos puntos críticos:

$$C' = 0 \Rightarrow -30 + 16r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{15}{8}} \approx 1.23311.$$

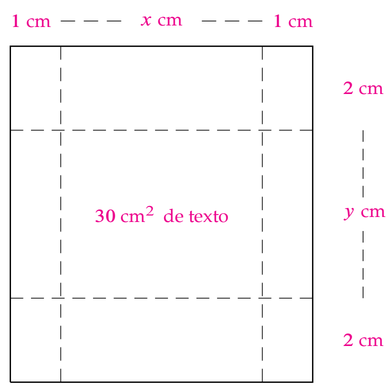
Usando (C):

$$h = \frac{10}{(1.23311)^2} - \frac{4}{3}(1.23311) \approx 4.93238.$$

Los valores de r, h encontrados son las dimensiones que minimizan el costo del tanque de acero con capacidad 10π pies^3 □

42. Una página ha de contener 30 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

▼ Hagamos un croquis con el tamaño de la página y los datos



Se sabe que $xy = 30$ cm^2.

Se quiere minimizar el área de la página de papel, esto es: $A = (x+2)(y+4)$.

Entonces el área es una función de dos variables: x, y.

Pero como $xy = 30 \Rightarrow y = \dfrac{30}{x}$, sustituyendo este valor en la expresión para el área de la página (A), queda como función de la única variable x, a saber:

$$A(x) = (x+2)\left(\frac{30}{x} + 4\right) = 30 + 4x + \frac{60}{x} + 8 = 4x + 60x^{-1} + 38.$$

Para hallar los puntos críticos se deriva

$$A'(x) = 4 - \frac{60}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{60}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{15}.$$

Por lo que

$$x = \sqrt{15};$$

$$y = \frac{30}{\sqrt{15}} = \frac{30\sqrt{15}}{15} = 2\sqrt{15} = 2x.$$

Como $A''(x) = (4 - 60x^{-2})' = \dfrac{120}{x^3} > 0$, se trata, en efecto, de un mínimo.

□

43. Los costos de la empresa Alfa están dados por la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, donde x representa miles de artículos vendidos. Se pronostica que los costos serán mínimos si se venden entre 1 700 y 1 800 artículos. ¿Es verdadero el pronóstico? Justifique su respuesta.

▼ El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$, pues $\sqrt[3]{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - \dfrac{2x^2}{3(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3(x^2-1) - 2x^2}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x \approx \pm 1.7320508.$$

Se toma el valor positivo por tratarse de costos en una empresa.

Para saber si son extremos calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{6x(x^2-1)^{\frac{4}{3}} - 4(x^2-1)^{\frac{1}{3}}2x(x^2-3)}{9(x^2-1)^{\frac{8}{3}}} = \frac{6x(x^2-1) - 8x(x^2-3)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}} =$$

$$= \frac{6x^3 - 6x - 8x^3 + 24x}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}} = \frac{-2x^3 + 18x}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}.$$

Como

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{-2 \times 3^{\frac{3}{2}} + 18 \times \sqrt{3}}{9(3-1)^{\frac{7}{3}}} = \frac{-6 \times \sqrt{3} + 18 \times \sqrt{3}}{9 \times 2^{\frac{7}{3}}} > 0,$$

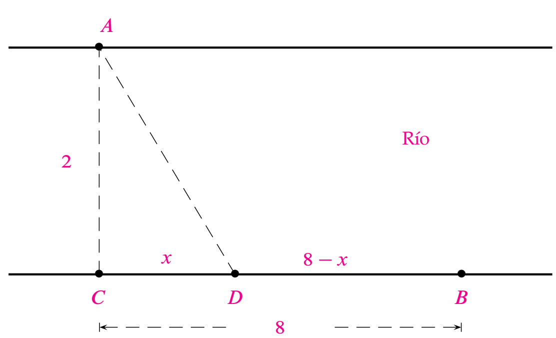
se trata de un mínimo, luego, efectivamente, este mínimo se produce cuando se venden 1 732.0508 de artículos.

□

44. Un hombre se encuentra en un punto A de la orilla de un río rectilíneo de 2 km de ancho. Sea C el punto enfrente de A en la otra orilla. El hombre desea llegar a un punto B situado a 8 km a la derecha y en la misma orilla de C.

El hombre puede remar en su bote cruzando el río hasta el punto D entre B y C. Si rema a 6 km/h y corre a 8 km/h ¿a qué distancia debe estar D del punto C, para llegar al punto B lo más pronto posible?

▼ Hagamos un bosquejo figurado de la situación:



Queremos hallar x de manera que el tiempo para ir de A a D por el río, y de D a B por la orilla, sea mínimo. Por el teorema de Pitágoras $AD = \sqrt{4+x^2}$, el tiempo empleado para recorrer esta distancia es $t_1 = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{6}$ horas, ya que tiempo empleado $= \dfrac{\text{espacio recorrido}}{\text{velocidad}}$.

El tiempo para recorrer DB es $t_2 = \dfrac{8-x}{8}$ h.

La función de la que vamos a buscar su mínimo es:

$$T(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{4+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8}\,.$$

Puntos críticos,

$$T'(x) = \frac{2x}{2\times 6\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{8} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{6\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; 6\sqrt{4+x^2} = 8x \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 36(4+x^2) = 8^2x^2 \;\Leftrightarrow\; 144 = 64x^2 - 36x^2 \;\Leftrightarrow\; 28x^2 = 144 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x^2 = \frac{144}{28} = \frac{36}{7} \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{36}{7}} = \frac{6}{\sqrt{7}} \approx 2.26\,\text{km},$$

éste es el único punto crítico.

Calculamos la segunda derivada:

$$T''(x) = \frac{6\sqrt{4+x^2} - \dfrac{6x2x}{2\sqrt{4+x^2}}}{(6\sqrt{4+x^2})^2} = \frac{6(4+x^2) - 6x^2}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{24 + 6x^2 - 6x^2}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} =$$
$$= \frac{24}{36(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} = \frac{2}{3(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}\,.$$

Observemos que $T'' > 0$ siempre y, en particular $T''(2.26) > 0$, por lo cual existe un mínimo local en $x = 2.26$ km; podemos considerar que el dominio de la función T es $D_T = [0, 8]$, pues no tendría sentido desembarcar a la izquierda de C ni más allá de B; luego, el mínimo es el menor de los tres números:

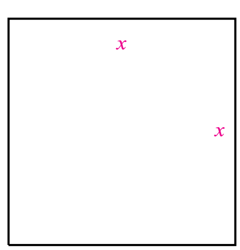
$$T(0) = \frac{2}{6} + \frac{8-0}{8} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\,\text{h} = 1.\overline{3}\,\text{h};$$
$$T(2.26) = \frac{\sqrt{4+(2.26)^2}}{6} + \frac{8-2.26}{8} \approx \frac{\sqrt{9.1076}}{6} + \frac{5.74}{8} \approx 1.22048\,\text{h};$$
$$T(8) = \frac{\sqrt{4+8^2}}{6} + \frac{8-8}{8} = \frac{\sqrt{4+64}}{6} + \frac{0}{8} \approx 1.374368542\,\text{h}.$$

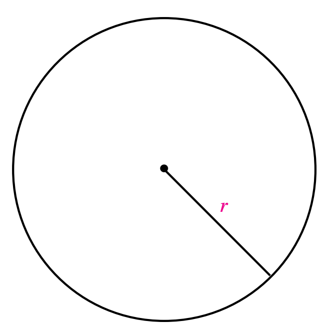
Efectivamente el tiempo mínimo se logra si desembarca a 2.26 km de C.

□

45. La suma del perímetro de un círculo y un cuadrado es de 16 cm. Hallar las dimensiones de las dos figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras.

▼ El dibujo de ambas figuras es:





De ambas tenemos:

El perímetro del círculo: $2\pi r$.

El perímetro del cuadrado: $4x$.
El perímetro de ambas figuras (usamos la restricción dada):

$$2\pi r + 4x = 16. \tag{*}$$

El área del círculo: πr^2.
El área del cuadrado: x^2.
El área de ambas figuras: $\pi r^2 + x^2$.
Ésta es la función de la que deseamos calcular el mínimo con la restricción dada:

$$A = \pi r^2 + x^2. \tag{**}$$

Esta función depende de dos variables. La relación entre estas variables viene dada por la condición $(*)$. De aquí despejamos una variable. Elegimos arbitrariamente r:

$$r = \frac{16 - 4x}{2\pi} = \frac{8 - 2x}{\pi}\,. \tag{***}$$

Sustituimos en $(**)$

$$A(x) = \pi\left(\frac{8-2x}{\pi}\right)^2 + x^2 \Rightarrow A(x) = \frac{1}{\pi}(8-2x)^2 + x^2$$

derivando, con respecto a x:

$$A'(x) = \frac{2}{\pi}(8-2x)(-2) + 2x = -\frac{4}{\pi}(8-2x) + 2x;$$

calculamos la segunda derivada:

$$A''(x) = -\frac{4}{\pi}(-2) + 2 = \frac{8}{\pi} + 2 > 0.$$

Esto nos indica que la función A siempre es cóncava hacia arriba, es decir, vamos a encontrar un mínimo.

Igualamos a cero la primera derivada, para encontrar los puntos críticos:

$$-\frac{4}{\pi}(8-2x) + 2x = 0 \Rightarrow -\frac{4}{\pi}(8-2x) = -2x \Rightarrow 8 - 2x = \frac{\pi}{2}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8 = \frac{\pi}{2}x + 2x = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)x = \frac{\pi+4}{2}x \Rightarrow x = \frac{16}{\pi+4}\,.$$

Éste es el valor de x que hace mínima el área $A(x)$.

Para encontrar el valor de r correspondiente, sustituimos en $(***)$

$$r = \frac{1}{\pi}\left(8 - 2\frac{16}{\pi+4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi + 32 - 32}{\pi+4}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi}{\pi+4}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = \frac{8}{\pi+4} = \frac{1}{2}x\,.$$

O sea, el lado del cuadrado es el doble del radio del círculo.

Estos valores, de x & r son las dimensiones de las figuras que hacen mínima el área total encerrada por ambas figuras. □